

CHAMP CENTRAL INTÉRIEUR “SANS PRESSION” - corrigé des exercices

I. Astre solide “simple”

- Pour la Terre, avec une masse volumique uniforme (valeur moyenne) et une pesanteur moyenne $g \approx 5 \text{ m.s}^{-2}$, l'équilibre statique correspondrait à une pression au centre $p \approx \mu g R \approx 1,6 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$. En réalité μ n'est pas uniforme ; la pression au centre est estimée à $p \approx 4 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$.
 ♦ remarque : les zones de plus faible masse volumique sont situées à la périphérie ; la forme sphérique fait qu'elles contribuent plus à la valeur moyenne, se comportant comme $\langle \mu r^2 \rangle$, alors qu'elles contribuent en proportion moindre aux effets de pression ; cette dernière est donc ainsi sous-estimée.
 • En comparaison : $\mu c^2 \approx 5 \cdot 10^{20} \text{ Pa} \gg p$.
- Pour le Soleil, avec une pesanteur moyenne $g \approx 150 \text{ m.s}^{-2}$, l'équilibre statique correspondrait à une pression au centre $p \approx \mu g R \approx 1,4 \cdot 10^{14} \text{ Pa}$. En réalité, la masse volumique n'est pas du tout uniforme ; la pression au centre est estimée à $p \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$.
 • En comparaison : $\mu c^2 \approx 1,4 \cdot 10^{20} \text{ Pa} \gg p$.
- Pour une naine blanche, avec une pesanteur moyenne $g \approx 10^6 \text{ m.s}^{-2}$, l'équilibre statique correspondrait à une pression au centre $p \approx \mu g R \approx 10^{22} \text{ Pa}$. En réalité, la masse volumique n'est pas uniforme ; il est possible que la pression au centre atteigne $p \approx 10^{24} \text{ Pa}$, voire même $p \approx 10^{25} \text{ Pa}$.
 • En comparaison : $\mu c^2 \approx 1,4 \cdot 10^{26} \text{ Pa} \gg p$ mais la pression est moins nettement négligeable.
- Pour une étoile à neutrons, avec une pesanteur moyenne $g \approx 5 \cdot 10^{11} \text{ m.s}^{-2}$, l'équilibre statique correspondrait à une pression au centre $p \approx \mu g R \approx 10^{33} \text{ Pa}$. En réalité, la masse volumique n'est pas uniforme ; il n'est pas impossible que la pression au centre tende vers l'infini.
 • En comparaison : $\mu c^2 \approx 5 \cdot 10^{34} \text{ Pa} > p$ mais la pression ne peut probablement pas être négligée dans certains calculs.
 ♦ remarque : certains modèles prévoient que la pression peut atteindre $p \approx \frac{1}{3} \mu c^2$.

II. Astre solide “simple”

- Pour une métrique de la forme : $ds^2 = A(r) c^2 dt^2 - C(r) dr^2 - D(r) d\Omega^2$, on obtient :

$$g_{00} = A ; g_{11} = -C ; g_{22} = -D ; g_{33} = -D \sin^2(\theta) ;$$

$$g^{00} = \frac{1}{A} ; g^{11} = -\frac{1}{C} ; g^{22} = -\frac{1}{D} ; g^{33} = -\frac{1}{D \sin^2(\theta)} ;$$

$$\Gamma_{001} = -\Gamma_{100} = \frac{A'}{2} ; \Gamma_{111} = -\frac{C'}{2} ; \Gamma_{221} = -\Gamma_{122} = -\frac{D'}{2} ;$$

$$\Gamma_{331} = -\Gamma_{133} = -\frac{D'}{2} \sin^2(\theta) ; \Gamma_{332} = -\Gamma_{233} = -D \sin(\theta) \cos(\theta) ;$$

$$\Gamma^0_{01} = \frac{A'}{2A} ; \Gamma^1_{00} = \frac{A'}{2C} ; \Gamma^1_{11} = \frac{C'}{2C} ;$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \frac{D'}{2D} ; \Gamma^1_{22} = -\frac{D'}{2C} ; \Gamma^1_{33} = -\frac{D'}{2C} \sin^2(\theta) ;$$

$$\Gamma^3_{32} = \cot(\theta) ; \Gamma^2_{33} = -\sin(\theta) \cos(\theta) .$$

• On en déduit : $R_{00} = \frac{A''}{2C} - \frac{A'}{2C} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} - \frac{D'}{D} \right) ;$
 $R_{11} = -\frac{A''}{2A} - \frac{D''}{D} + \frac{A'}{2A} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} \right) + \frac{D'}{D} \left(\frac{C'}{2C} + \frac{D'}{2D} \right) ;$
 $R_{22} = -\frac{D''}{2C} - \frac{D'}{2C} \left(\frac{A'}{2A} - \frac{C'}{2C} \right) + 1 ; R_{33} = R_{22} \sin^2(\theta) .$

• Par ailleurs : $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} ; U^0 = \frac{c}{\sqrt{A}}$ et $U^k = 0 ; T^{00} = \frac{\mu c^2}{A}$ et $T^{0k} = T^{ij} = 0 ; T = g_{00} T^{00} = \mu c^2 .$

• Ceci correspond à : $T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T = A \frac{\mu c^2}{2} ; T_{11} - \frac{1}{2} g_{11} T = C \frac{\mu c^2}{2} ;$
 $T_{22} - \frac{1}{2} g_{22} T = D \frac{\mu c^2}{2} ; T_{33} - \frac{1}{2} g_{33} T = D \sin^2(\theta) \frac{\mu c^2}{2} .$

- Les équations du champ peuvent donc s'écrire, avec $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$:

$$\begin{aligned} R_0^0 &= \frac{A''}{2AC} - \frac{A'}{2AC} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} - \frac{D'}{D} \right) = \chi \frac{\mu c^2}{2} ; \\ R_1^1 &= \frac{A''}{2AC} + \frac{D''}{CD} - \frac{A'}{2AC} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} \right) - \frac{D'}{CD} \left(\frac{C'}{2C} + \frac{D'}{2D} \right) = -\chi \frac{\mu c^2}{2} ; \\ R_2^2 &= R_3^3 = \frac{D''}{2CD} + \frac{D'}{2CD} \left(\frac{A'}{2A} - \frac{C'}{2C} \right) - \frac{1}{D} = -\chi \frac{\mu c^2}{2} . \end{aligned}$$

2. • On obtient par combinaison :

$$\begin{aligned} R_0^0 - R_1^1 &= -\frac{D''}{CD} + \frac{D'}{CD} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} + \frac{D'}{2D} \right) = \chi \mu c^2 ; \\ R_2^2 + R_3^3 &= \frac{D''}{CD} + \frac{D'}{CD} \left(\frac{A'}{2A} - \frac{C'}{2C} \right) - \frac{2}{D} = -\chi \mu c^2 . \end{aligned}$$

- La somme et la différence donnent ainsi respectivement :

$$\frac{D'}{2} \left(\frac{A'}{A} + \frac{D'}{2D} \right) = C ; \quad -\frac{D''}{CD} + \frac{D'}{2CD} \left(\frac{C'}{C} + \frac{D'}{2D} \right) + \frac{1}{D} = \chi \mu c^2 .$$

III. Couche sphérique

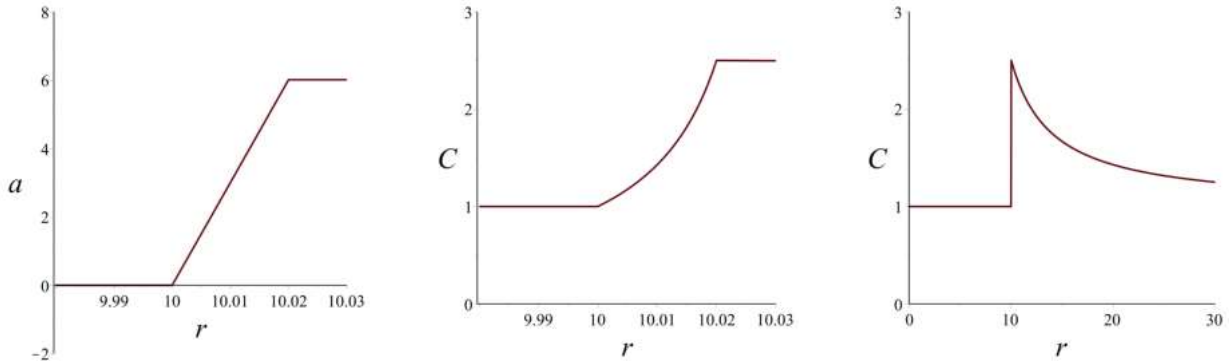
- Pour une métrique de forme "classique" : $ds^2 = A(r) c^2 dt^2 - C(r) dr^2 - D(r) d\Omega^2$, on peut noter : $a(r) = \frac{2G}{c^2} M(r)$ et $M(r) = \int_0^r \mu(r') 4\pi r'^2 dr'$.

- Pour une couche sphérique, on obtient alors à l'intérieur : $M(r) = 0$ et $a(r) = 0$;

$$A(r) = A(0) \cdot \exp \left(\int_0^r \frac{a(r')}{r' \cdot (r' - a(r'))} dr' \right) = A(0) = Cste ; \quad C(r) = \frac{r}{r - a(r)} = 1 .$$

- On peut noter que $C(r)$ semble, comme $a(r)$, discontinu à la traversée de la couche ; ceci est simplement dû à la modélisation par une répartition surfacique. Par exemple, pour une masse volumique uniforme répartie sur une couche de faible épaisseur δ , on obtient $M(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot (r^3 - R_-^3) \mu$ donc $M(r) \approx 4\pi R_-^2 \cdot (r - R_-) \mu$ donnant au total $M = M(R_+) \approx 4\pi R_-^2 \delta \cdot \mu$; ainsi la transition est continue. Quoi qu'il en soit, l'espace intérieur est géométriquement plat.

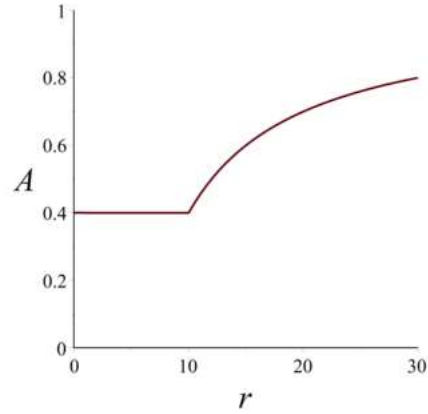
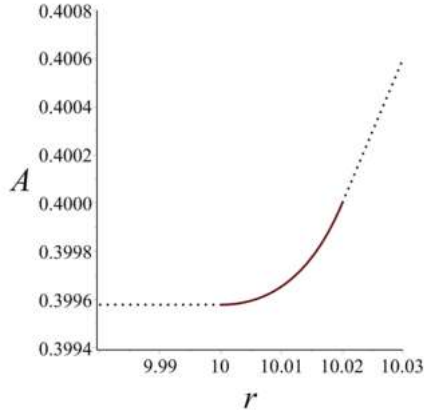
♦ remarque : on peut visualiser les comportements locaux et globaux de simulations numériques ; dans la couche $a(r)$ varie quasi-linéairement et $C(r)$ est continu mais semble globalement discontinu.



- Par ailleurs $A(r)$ obtenu par intégration de $a(r)$ est continu à la traversée de la couche, mais avec dérivée discontinue ; il se comporte de façon analogue à un potentiel de gravitation, avec une discontinuité du champ.

- Puisque $A(r) = A(R) = Cste$ à l'intérieur, le champ intérieur est nul, comme pour le théorème de Gauss. Par contre ici en comparant avec l'extérieur : $A(0) = A(R_-) \approx A(R_+) = \frac{1}{C(R_+)} = 1 - \frac{r_s}{R_+} \neq 1$, c'est-à-dire que l'écoulement du temps n'est pas identique à celui d'un espace-temps plat.

♦ remarque : on peut visualiser les comportements locaux et globaux de simulations numériques ; dans la couche $A(r)$ est continu à dérivée continue mais semble globalement à dérivée discontinue.



• Il apparaît donc une différence qualitative avec le cas non relativiste décrit avec le théorème de Gauss ; ceci semble rappeler le principe de Mach : l'espace-temps intérieur n'est pas indépendant de ce qu'il y a autour.

IV. Astre solide "simple" en coordonnées "classiques"

1.a. • Dans le cas particulier $D = r^2$ on obtient $D' = 2r$ et $D'' = 2$; ainsi :

$$\frac{A'}{A} = \frac{C-1}{r} ; \quad \frac{1}{C} - \frac{rC'}{C^2} = 1 - \chi \mu c^2 r^2 .$$

• La première équation donne : $A = Cste \cdot \exp\left(\int \frac{C-1}{r} dr\right)$.

• La seconde équation conduit à : $\frac{r}{C} = r - \chi c^2 \int \mu r^2 dr + Cste$, où la constante d'intégration peut être incluse dans la borne inférieure de l'intégrale.

• Pour préciser les conditions physiques d'intégration, il est toutefois nécessaire d'éviter l'ambiguïté des notations. En notant par exemple pour le "rayon interne" de l'astre $\rho = \int_{r(0)}^R \sqrt{C(r')} dr'$ (distance au centre), on signale que le "rayon apparent" R est déduit du périmètre de l'astre (grandeur observée) et que ρ ne peut être connu sans préciser quelle valeur de r correspond au centre.

• On peut poser : $M(r) = \int_{r_0}^r \mu(r') 4\pi r'^2 dr'$ et $a(r) = \frac{\chi c^2}{4\pi} M(r) = \frac{2G}{c^2} M(r)$. La relation précédente peut alors s'écrire sous la forme : $C(r) = \frac{r}{r-a(r)}$.

♦ remarque : il est intéressant de noter que $C(r)$ est continue en $r(R)$, ce qui est logique pour la métrique (potentiel), mais que $\frac{dC(r)}{dr}$ est discontinue, comme $a(r)$, ce qui semble anormal pour un champ produit par une répartition volumique de masse ; en fait, si $A(r)$ et $D(r)$ expriment les relations entre variations de r et t ou θ , au contraire $C(r)$ n'exprime a priori que la façon de représenter r (on peut choisir $C(r) = 1$ alors qu'il est impossible de choisir $A(r) = 1$ ou $D(r) = 1$) ; toutefois, en imposant $D(r) = r^2$ on reporte en pratique sur $C(r)$ l'information sur le champ ; ainsi $C(r)$ semblerait devoir respecter les conditions de continuité.

• Ceci permet de préciser : $A = \alpha_0 \cdot \exp\left(\int_{r_0}^r \frac{a(r')}{r' \cdot (r' - a(r'))} dr'\right)$ avec $\alpha_0 = A(r_0)$.

♦ remarque : on peut vérifier que $A(r)$ et $\frac{dA(r)}{dr}$ sont continues en $r(R)$; il en est de même pour $D(r)$ et $\frac{dD(r)}{dr}$, mais cela est simplement dû à l'expression choisie (arbitrairement).

1.b. • À l'extérieur de l'astre : $M = M(R) = \int_{r_0}^R \mu(r') 4\pi r'^2 dr'$ et $r_s = a(R) = \frac{2GM}{c^2}$; ceci redonne l'expression "classique" : $C = \frac{r}{r-r_s}$.

♦ remarque : l'intégrale $\int_{r_0}^R \mu(r') 4\pi r'^2 dr'$ correspond à la masse totale mais le volume infinitésimal n'est pas $4\pi r^2 dr$; ceci est lié au fait que cette masse n'est pas la somme des masses infinitésimales, car il intervient aussi la "masse équivalente" associée à l'énergie d'interaction gravitationnelle.

• On obtient aussi : $A(r) = \alpha_0 \cdot \exp\left(\int_{r_0}^r \frac{a(r')}{r' \cdot (r' - a(r'))} dr'\right) \cdot \exp\left(\int_R^r \frac{r_s}{r' \cdot (r' - r_s)} dr'\right) = A(R) \frac{R}{R-r_s} \frac{r-r_s}{r}$.

• Ceci peut s'écrire (compte tenu de la limite $A_\infty = 1$) : $A(r) = Cste \cdot \frac{r-r_s}{r} = \frac{1}{C(r)}$; mais c'est aussi cohérent avec : $A(r) = A(R) C(R) \frac{r-r_s}{r} = \frac{1}{C(r)}$ puisque $A C = 1$ à l'extérieur, y compris à la limite.
 ◇ remarque : d'après le principe de raccordement par continuité, devant aboutir à $A_\infty = 1$, on peut aussi écrire formellement $A(r) = \exp\left(-\int_r^\infty \frac{a(r')}{r' \cdot (r'-a(r'))} dr'\right)$.

2.a. • Il semble logique que la métrique soit déduite de l'intégration de μ sur l'ensemble de la répartition de masse. Cela correspond à $a(r(0)) = 0$ donc $M(r(0)) = 0$ et $r_0 = r(0)$ (mais cette valeur reste à préciser).

• Pour les masses volumiques modérées, il semble logique que la dérivée de $M(r)$ s'annule au centre, comme c'est le cas dans un espace plat : $a'(r_0) \chi c^2 \mu(r_0) r_0^2 = 0$ et donc $r_0 = 0$; ceci est lié au fait que la surface d'une sphère tend vers zéro en même temps que le rayon. Ce raisonnement ne s'applique pas pour les cas où la masse volumique diverge au centre, mais il n'est pas facile d'imaginer une sorte de "transition de phase" qui ferait qu'à partir de certaines conditions (lesquelles ?) on obtiendrait $r_0 \neq 0$.

◇ remarque : par contre, dans le modèle de L. S. Abrams, la limite d'une masse ponctuelle correspond à un périmètre $2\pi r_s$ donc à une surface non nulle.

• On peut préciser pour une masse volumique uniforme (ce qui peut être une bonne approximation qualitative) : $C(r) = \frac{r}{r-a(r)}$ avec $a(r) = \lambda r^3$ et $\lambda = \frac{\chi \mu c^2}{3}$. Ainsi $C = \frac{1}{1-\lambda r^2}$ donc $r < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

• On peut aussi préciser $A = \alpha_0 \cdot \exp\left(\int_0^r \frac{a(r')}{r' \cdot (r'-a(r'))} dr'\right)$ pour une masse volumique uniforme : $A = \alpha_0 \cdot \exp\left(\int_0^r \frac{\lambda r'}{1-\lambda r'^2} dr'\right) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{1-\lambda r^2}} = \alpha_0 \cdot \sqrt{C}$; la contrainte imposée est donc la même : $r < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

• Le raccordement en surface impose : $A(R) = \frac{1}{C(R)} = \alpha_0 \cdot \sqrt{C(R)}$ donc $A(0) = \alpha_0 = [A(R)]^{3/2}$.

• Il est alors intéressant de remarquer que $A(0) < A(R) < 1$, c'est à dire que, si la nullité du champ au centre correspond bien à une métrique spatiale plate identique à celle à l'infini, on y obtient au contraire une composante temporelle (temps propre pour un point immobile) "ralentie", donc dépendant de la répartition de masse environnante.

• Ceci correspond à un comportement fondamentalement différent de celui qu'on attendrait en physique de type "newtonien" (d'après le théorème de Gauss, la masse environnante n'aurait aucun effet sur les objets au centre) ; on obtient ainsi une description plus proche de celle considérée par Mach.

2.b. • Puisque la distance radiale peut s'écrire $d\rho = \sqrt{C(r)} dr$, il faut supposer $a(r) < r$ pour tout r .

◇ remarque : le modèle "classique" considère que cette condition n'est nécessaire que pour un astre statique, en précisant qu'au delà (intérieur d'un "trou noir") la matière s'effondre alors en une singularité ponctuelle, en $r = 0$; dans ces conditions la coordonnée r n'y est plus du genre espace.

• Par ailleurs $d\rho = \sqrt{C(r)} dr$ correspond ici à : $\rho = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin(r \sqrt{\lambda})$; $r = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\rho \sqrt{\lambda})$. La condition limite $r < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ correspond donc à $\rho < \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$.

• On peut vérifier que les dimensions des astres "connus" vérifient la condition précédente :

◇ Terre : $\lambda = \frac{\chi \mu c^2}{3} \approx 3 \cdot 10^{-23} \text{ m}^{-2}$; $\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} = 2,7 \cdot 10^8 \text{ km} \gg R \approx 6400 \text{ km}$;

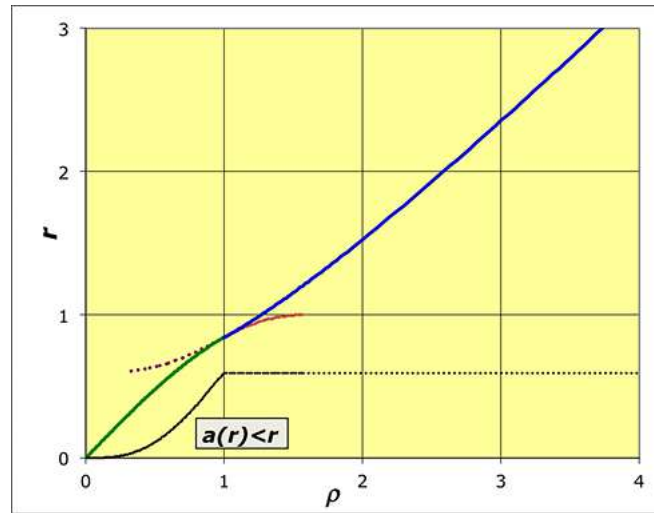
◇ Soleil : $\lambda \approx 1 \cdot 10^{-23} \text{ m}^{-2}$; $\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} = 5,1 \cdot 10^8 \text{ km} \gg R \approx 6 \cdot 10^5 \text{ km}$;

◇ naine blanche : $\lambda \approx 1 \cdot 10^{-17} \text{ m}^{-2}$; $\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} = 5 \cdot 10^5 \text{ km} \gg R \approx 10^4 \text{ km}$;

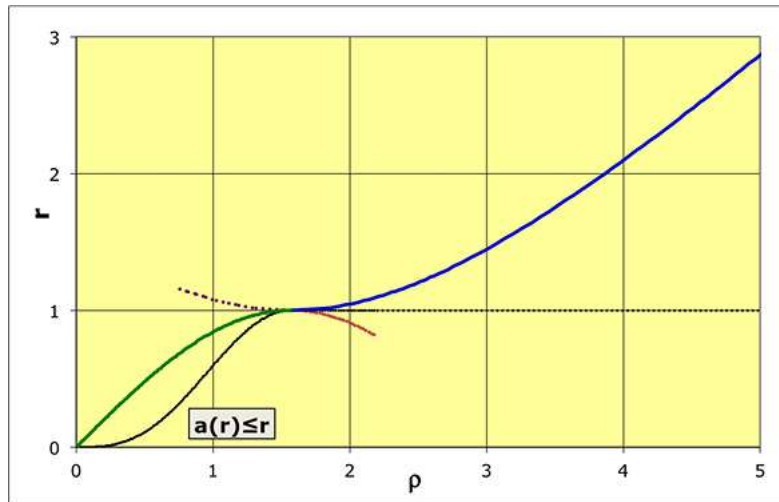
◇ étoile à neutrons : $\lambda \approx 3,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-2}$; $\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} = 27 \text{ km} > R \approx 5 \text{ km}$.

• Il est toutefois intéressant de remarquer qu'aucune contrainte physique ne semble imposer une taille maximum (pour une masse volumique donnée). Rien n'interdit en principe qu'il puisse exister des astres de très grande taille et masse, pour lesquels la limite serait dépassée ; l'interprétation reste donc à préciser.

• Il est alors utile de considérer la variation de r en fonction de ρ . Pour λ fixé (les représentations graphiques sont réalisées en prenant $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ comme unité de longueur), les rayons $R < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ donnent un raccordement simple ; la singularité n'est jamais atteinte : $a(r) < r$ en tout point.



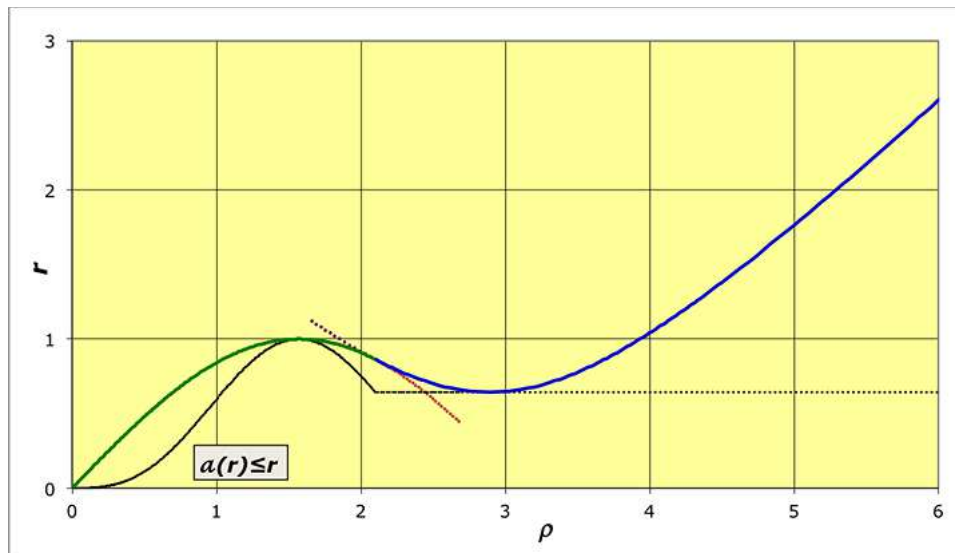
• Le rayon $R = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ donne un raccordement limite, où la singularité est atteinte en surface : $a(r) \leq r$ et $r_s = r(R)$.



• De même que la coordonnée r “classique” est mal adaptée pour décrire les éventuels points extérieurs avec $r < r_s$, elle l'est aussi à l'intérieur car les éventuels points avec $\rho > \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$ correspondraient à des valeurs $r = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\rho \sqrt{\lambda}) < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ semblant les situer à tort plus près de l'origine. La décroissance de $r(\rho)$ dans la zone intermédiaire justifie d'une certaine manière le comportement mathématique ; si $r(\rho)$ intérieur décroît près de la surface, le raccordement impose logiquement que $r(\rho)$ extérieur y soit décroissant, avec un minimum pour $r = r_s$, conformément au modèle “isotrope”.

♦ remarque : pour $\rho = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ l'astre remplit cet espace (alors “refermé”) et il n'y a pas d'extérieur.

• Les “rayons intérieurs” $\rho > \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$ correspondent à $R > \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$; ils donnent “en principe” un raccordement supra-limite, où la singularité $r = a(r)$ est atteinte à l'intérieur, mais jamais dépassée : $a(r) \leq r$ et $r_s < R$, car $a(r)$ diminue près de la surface ; en outre la singularité $r = r_s$ est atteinte aussi à l'extérieur, car r diminue aussi ensuite, mais $r_s \leq r$. Ce cas nécessite toutefois une étude plus détaillée.

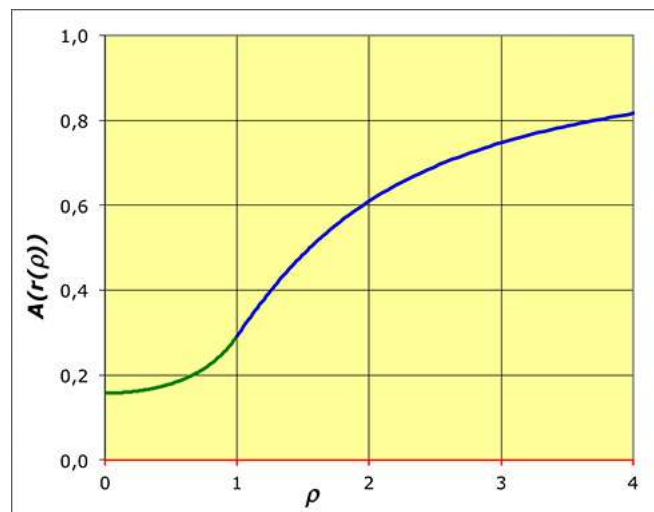


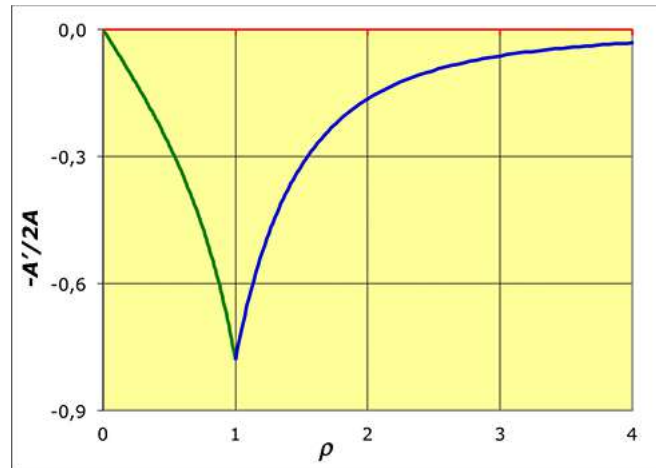
• On constate alors entre les deux rayons où $r = a(r)$ et $r = r_s$ une décroissance de $A(r(\rho))$, ce qui correspond à un champ gravitationnel répulsif. Non seulement la matière éventuellement captée par chute sur l'astre ralentit sa chute à l'approche de la surface, mais elle ne peut ensuite pas y rester : l'astre ne peut être stable car la couche de surface dans cette zone est rejetée vers l'extérieur.

• Ceci peut être précisé par une étude de A (se comportant qualitativement de façon analogue à un potentiel), ou mieux encore par une représentation de la quantité $\frac{A'(r)}{2 A \sqrt{C}} = \frac{A'(\rho)}{2 A}$ correspondant à l'équivalent relativiste de la composante radiale du champ de gravitation.

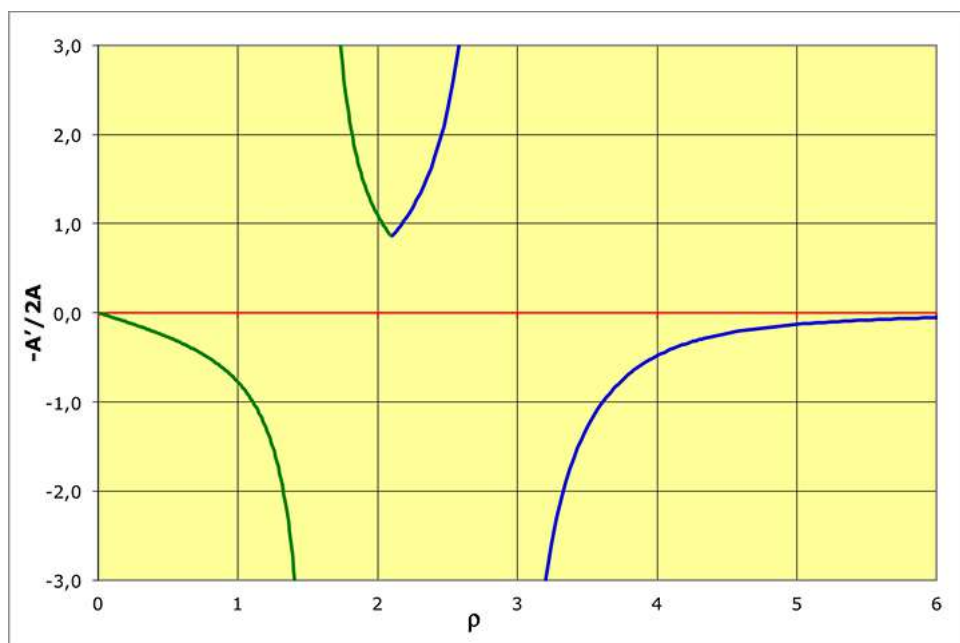
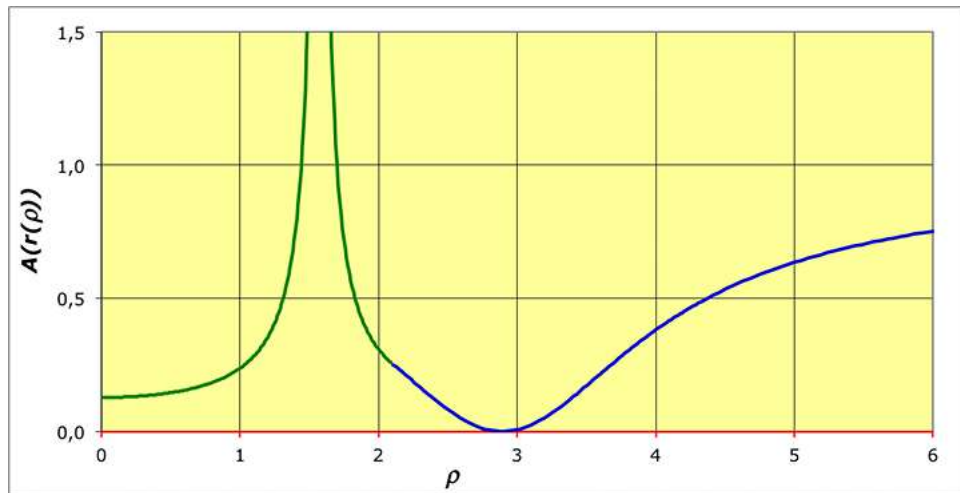
♦ remarque : cette quantité est invariante "seulement" par changement de coordonnée radiale statique (le "champ gravitationnel" apparent est différent dans un référentiel accéléré).

• Dans le cas simple $R < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, on constate que le champ a un comportement "habituel" qualitativement comparable à celui d'un champ newtonien (la principale différence qualitative avec la limite newtonienne est que celle-ci donne une dépendance linéaire à l'intérieur pour μ uniforme).





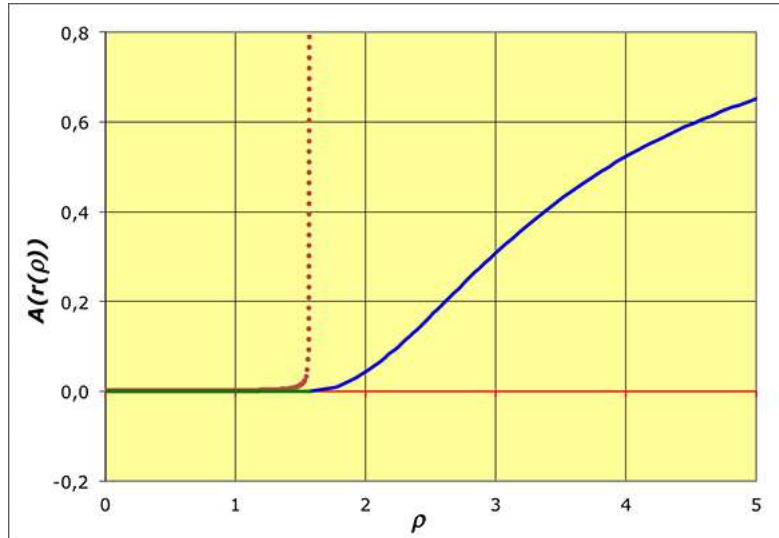
- Pour le cas dépassant la limite, la matière juste en dessous de $\rho = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$ est retenue par un champ gravitationnel infiniment attractif, mais (dans l'interprétation "isotrope" qui semble ici inévitable) celle juste au dessus est rejetée par un champ répulsif infini. Cette propriété pourrait justifier qu'on n'observe aucun astre dépassant la limite précédente.



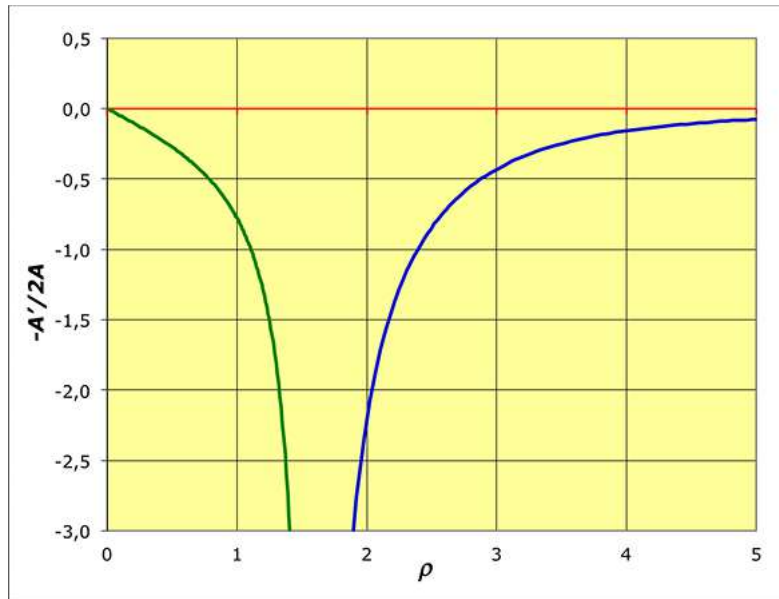
♦ remarque : on constate en outre que le champ répulsif qui éjecte la couche de surface est décroissant ; ceci peut éventuellement causer une compression de la couche éjectée.

♦ remarque : s'il est vrai que la quantité $\frac{A'(r)}{2A\sqrt{C}} = \frac{A'(\rho)}{2A}$ (correspondant à l'équivalent relativiste du champ de gravitation) est invariante "seulement" par changement de coordonnée radiale statique, une conséquence fondamentale de sa divergence au niveau de la singularité est que les particules ne peuvent y passer qu'à la vitesse de la lumière (avec une énergie infinie) ; or cette propriété est invariante par tout changement de référentiel subluminaire.

• Une anomalie mathématique intervient toutefois dans le cas limite $R = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. On constate que le champ gravitationnel devrait nul à l'intérieur (potentiel nul, donc uniforme, en vert), ce qui est de même incompatible avec la stabilité de l'astre.



• Toutefois, étrangement, la limite du champ $\frac{A'(\rho)}{2A}$ intérieur semble ne pas être nulle dans ce cas ; elle est a priori indéterminée avec $A' = 0$ et $A = 0$ (cela dépend du passage à la limite). Le raccordement de $A(r)$ impose une constante de normalisation tendant vers zéro à l'intérieur, mais celle-ci se simplifie dans la limite du champ (on obtient ainsi un champ infini en surface).



• En fait, l'équivalent relativiste du potentiel de gravitation est $\ln(\sqrt{A})$; cette quantité tend vers l'infini quand $A \rightarrow 0$, rendant impossible le raccordement par continuité. En outre, ce potentiel étant défini à une constante additive près, tout se passe pour lui comme si A était défini à une constante multiplicative près. On peut donc qualitativement omettre la constante de normalisation nulle de A pour tracer le comportement qualitatif associé (sorte d'exponentielle très rapide, en pointillé rouge sur le graphique, pour $A(0) = 0,001$).

♦ remarque : cette étrangeté mathématique peut par contre faire douter d'une possible application physique des cas où la limite est dépassée (mais seule une étude dynamique pourrait conclure).

V. Intégrale sur la surface d'une sphère

1.a. • La métrique sphérique "usuelle" correspond à : $d\ell^2 = R^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2)$.

• La circonférence d'un cercle "parallèle" d'angle θ est : $L(\theta) = R \sin(\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R \sin(\theta)$.

1.b. • La variable choisie correspond à : $r = R \sin(\theta)$.

• On obtient ainsi : $dr = R \cos(\theta) d\theta$; la métrique peut donc s'écrire :

$$d\ell^2 = \frac{1}{\cos^2(\theta)} dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{1}{1-\sin^2(\theta)} dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{1}{1-\frac{r^2}{R^2}} dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

1.c. • La variable $r = R \sin(\theta)$ est maximum à l'équateur, puis redécroît ; il y a donc ambiguïté entre deux parallèles symétriques par rapport à l'équateur.

♦ remarque : on peut aussi citer la difficulté apparente de la métrique, si on imagine utiliser des valeurs $r > R$ (en fait il n'y en a pas) ; ainsi que les inévitables difficultés de passage à la limite pour $r \rightarrow R$.

2.a. • On obtient dans ce cas : $M(r) = 2\pi \sigma \int_0^r r' dr' = \pi \sigma r^2$.

2.b. • Quand le cercle limite passe progressivement du nord jusqu'au sud, la quantité $M(r) = \pi \sigma r^2$ augmente avec r jusqu'à l'équateur, puis diminue avec r jusqu'au pôle sud (où $M = 0$).

• Cela peut paraître contradictoire dans la mesure où l'effet de la masse située dans l'hémisphère sud semble compenser celui de la masse dans l'hémisphère nord.

2.c. • Pour compenser la contradiction précédente, on pourrait ajouter de façon "constructive" la contribution de l'hémisphère sud, en compensant le signe $dr < 0$ dans cette région.

• On obtiendrait ainsi dans l'hémisphère sud :

$$M(r) = 2\pi \sigma \int_0^R r' dr' + 2\pi \sigma \int_r^R r' dr' = \pi \sigma \cdot (2R^2 - r^2).$$

2.d. • Si on raisonne comme pour le "théorème de Gauss", un point à l'extérieur de la zone considérée devrait subir l'influence de toute la masse qui s'y trouve. Toutefois, puisque l'espace considéré est "fermé", il faut considérer différemment le cas d'une zone incluant une partie de l'hémisphère sud : un point "extérieur" à la zone aurait alors d'une certaine façon "l'impression" d'être "entouré" par la masse en question (elle se situe à des valeurs de r plus grandes). Or, selon le théorème de Gauss, la masse qui entoure n'a pas d'influence (par compensation).

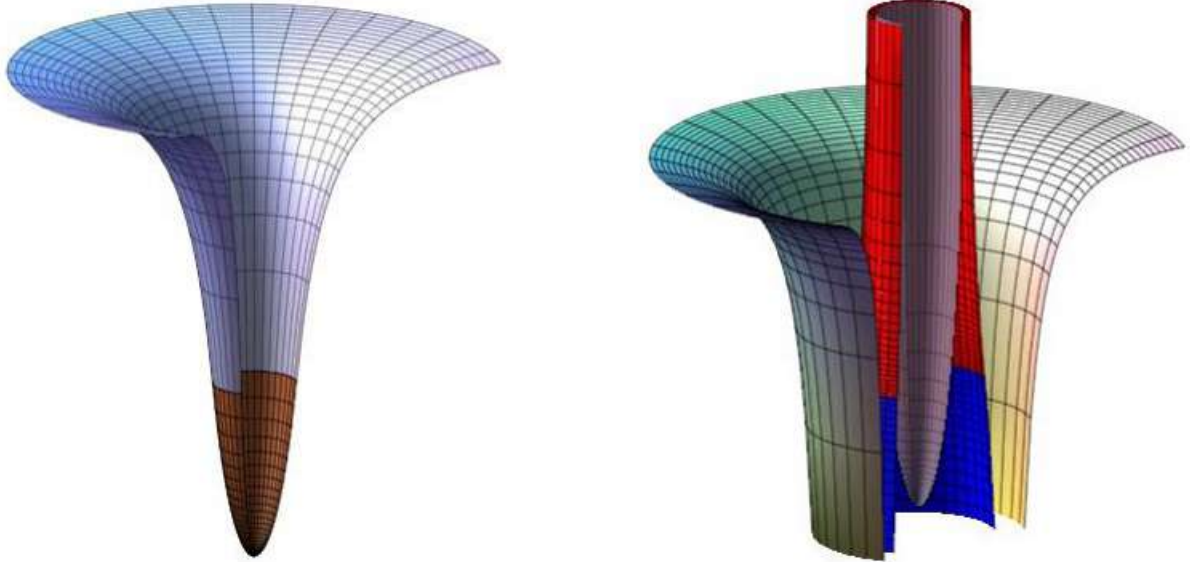
• On peut d'ailleurs vérifier la cohérence avec le cas limite où la répartition de masse remplit toute la sphère : il y a alors symétrie sphérique et le champ doit être nul. C'est exactement ce que décrit l'intégration "destructive" tenant compte du signe $dr < 0$.

VI. Géométrie spatiale

1. • En notant $\varepsilon = \mu c^2$ et $\lambda = \frac{\chi \varepsilon}{3}$ on peut utiliser $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ comme unité de longueur pour simplifier les notations. On utilise le "rayon périphérique" r comme paramètre ; on note $r = R$ le rayon de l'astre.

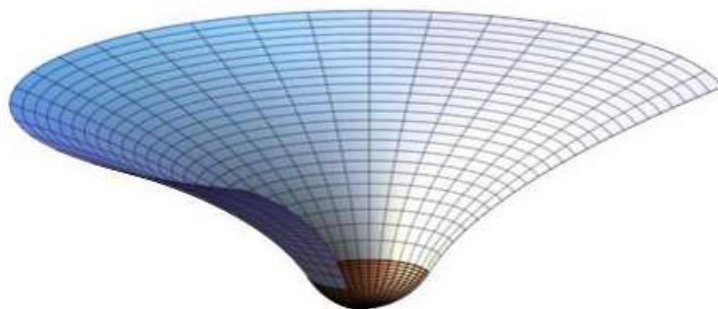
• On obtient à l'intérieur (en notations réduites) : $A(r) = \frac{[A(R)]^{3/2}}{\sqrt{1-r^2}}$; $C(r) = \frac{1}{1-r^2}$; $\rho(r) = \arcsin(r)$.

- En adoptant la modélisation “isotrope” pour permettre le raccordement, on obtient à l'extérieur : $A(r) = 1 - \frac{r_s}{r}$; $C(r) = \frac{1}{A(r)}$; $\rho(r) = r_s \operatorname{artanh}\left(\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}\right) + r \cdot \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} + \rho_R$ avec $r_s = R^3$ et où ρ_R est une constante pour raccorder $\rho(R)$; en outre $A(R) = 1 - R^2$ pour raccorder $A(R)$.
- Dans un cas sans inversion, $\rho(R) < \frac{\pi}{2}$, on peut choisir par exemple $R = 0,85$; on obtient la première des représentations ci-dessous (l'intérieur est en marron).

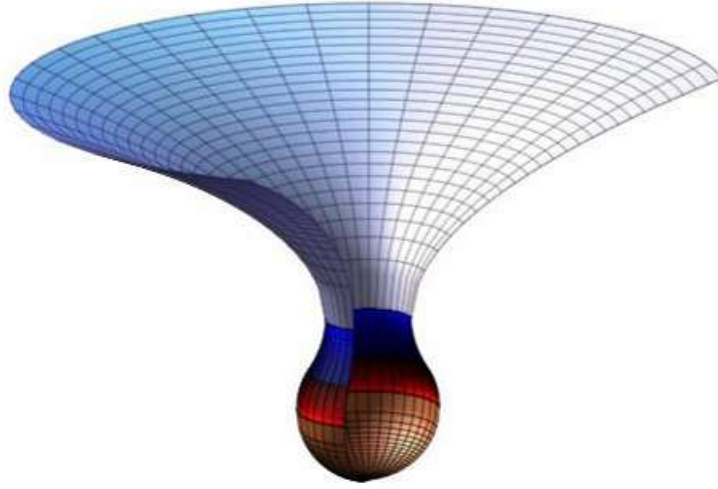


- Dans le cas avec inversion, on peut choisir aussi $R = 0,85$ (puisque r diminue) ; le raccordement de $\rho(r)$ est moins simple mais analogue. On obtient la seconde des représentations ci-dessus ; on remarque le champ répulsif intérieur (en rouge) et extérieur (en bleu).
- ◊ remarque : cette modélisation en terme de “potentiel” n'est valable que pour un raisonnement statique ; une particule en mouvement a une énergie différente dont subit en général un effet gravitationnel différent.
- ◊ remarque : cette modélisation n'est toutefois pas complète car on peut montrer que la pression n'est en fait pas négligeable.

2. • Avec les mêmes notations (réduites), on obtient à l'intérieur : $d\rho^2 = dr^2 + dz^2$; $C(r) = \frac{1}{1-r^2}$; $d\rho^2 = C dr^2$; $dz^2 = \frac{r^2 dr^2}{1-r^2}$; $z = 1 \pm \sqrt{1-r^2}$ (portion de sphère de centre 1 et de rayon 1 , compte tenu de $z(0) = 0$).
- On obtient à l'extérieur : $A(r) = 1 - \frac{r_s}{r}$; $C(r) = \frac{1}{A(r)}$; $dz^2 = \frac{r_s dr^2}{r-r_s}$; $z = z_0 \pm 2 r_s \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1}$ où z_0 est une constante pour raccorder $z(R)$. Cela correspond à une portion de “paraboloïde” de révolution (selon un axe parallèle à sa directrice et non son axe de symétrie).
- Dans un cas sans inversion, $\rho(R) < \frac{\pi}{2}$, on peut choisir par exemple $R = 0,85$; on obtient la représentation suivante (l'intérieur est en marron).



- Dans le cas avec inversion, on peut choisir aussi $R = 0,85$ (puisque r diminue) ; le raccordement de $\rho(r)$ est moins simple mais analogue. On obtient la représentation suivante ; on remarque la zone d'inversion géométrique intérieure (en rouge) et extérieure (en bleu).



♦ remarque : on considère usuellement que l'espace est "asymptotiquement plat" et cela correspond bien à la description de la question (1) ; par contre, du point de vue géométrique, il a seulement une "direction asymptotique" plane.

3.
 - À l'extérieur, les objets sont attirés vers la singularité. Or, l'espace extérieur à l'astre est (selon la modélisation "isotrope") géométriquement symétrique par rapport à la singularité : un observateur situé dans la zone intérieure verrait la singularité de la même façon qu'un observateur situé à l'extérieur. En outre, la gravitation y est inversée : elle est répulsive par rapport à l'astre ; l'observateur verrait donc aussi les objets attirés vers la singularité (ainsi, l'autre côté d'un "trou noir" ne serait pas un "trou blanc", il aurait le même aspect qu'un "trou noir").
 - La différence essentielle est que, à cause de l'inversion géométrique, l'observateur verrait la surface de l'astre "entourer l'espace" autour de lui (plus ou moins comme nous voyons le "fond du ciel" autour de la Terre).
- ♦ remarque : en outre, un tel "astre" serait forcément instable, donc seule une étude dynamique pourrait être concluante.

VII. Masse "interne" et masse "externe"

- 1.a. • La somme des masses intérieures est :

$$\sum m(r) = \int_0^r \mu(r') 4\pi r'^2 d\rho(r') = \int_0^r \mu(r') 4\pi r'^2 \cdot (\pm \sqrt{C(r')}) dr'.$$

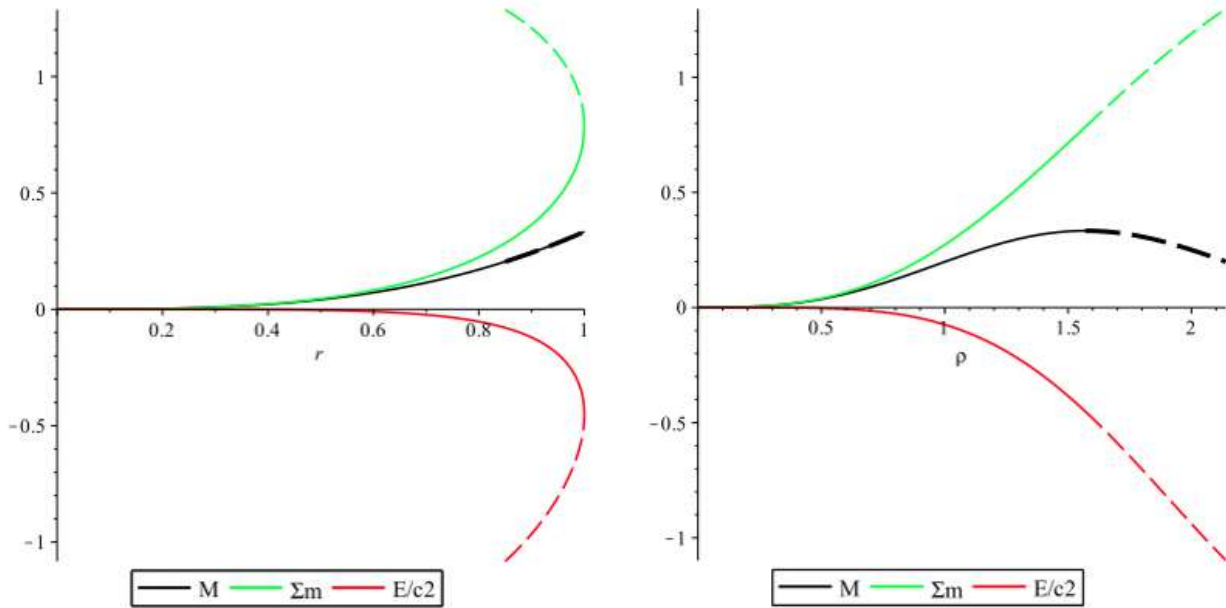
- 1.b. • L'énergie d'interaction gravitationnelle entre les masses intérieures est : $E(r) = [M(r) - \sum m(r)] c^2$.

- 2.a. • Avec masse volumique μ uniforme : $M(r) = \mu \frac{4\pi}{3} r^3$.

• Par ailleurs : $C(r) = \frac{1}{1-\lambda r^2}$ avec $\lambda = \frac{\chi \mu c^2}{3}$; $\sum m(r) = 4\pi \mu \int_0^r \frac{r'^2}{\sqrt{1-\lambda r'^2}} dr'$ tant que $\rho \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$. On obtient ainsi : $\sum m(r) = \frac{2\pi}{\lambda} \mu \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin(r\sqrt{\lambda}) - r \cdot \sqrt{1-\lambda r^2} \right]$.

• Au delà de la limite : $r \leq r_{max} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ mais $d\rho = -\sqrt{C} dr$; il faut alors séparer l'intégration en deux parties pour ajouter constructivement la partie au delà : $\sum m(r) = 4\pi \mu \cdot \left[\frac{\pi}{2\lambda\sqrt{\lambda}} - \int_0^r \frac{r'^2}{\sqrt{1-\lambda r'^2}} dr' \right]$.

- 2.b. • Les variations sont décrites par les courbes suivantes, en fonction de r et en fonction de ρ (en prenant $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ comme unité).



• On constate que, lorsque la limite est atteinte, la masse intérieure continue à croître, ainsi que la valeur absolue de l'énergie gravitationnelle, mais que le rayon "extérieur" et la masse "extérieure" rediminuent. Cet effet pourrait être lié à l'instabilité d'astres qui seraient mis temporairement dans une telle situation, qui de ce fait exploseraient en supernovas.

3. • On peut raisonner sur la "contraction" d'un astre, initialement en deçà de la limite, mais ici on ne considère pas un effondrement : on compare simplement divers astres de même contenu en particules, à la même température.

• Cela correspond à une augmentation de μ (donc aussi de λ), ainsi qu'à une diminution du rayon intérieur $\rho(R)$ (donc aussi du rayon extérieur R), en conservant une masse intérieure $\sum m$ constante.
 ♦ remarque : pour un effondrement, la masse volumique aurait sinon deux causes d'augmentation : le passage d'un même contenu matériel à un volume plus petit et l'augmentation de l'énergie thermique associée à la diminution gravitationnelle d'énergie (interaction croissante).

• Avec $X = \sqrt{\lambda} R$, on peut considérer la constante $\Xi = \frac{\chi c^2}{6\pi} \sum m = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\arcsin(X) - X \cdot \sqrt{1-X^2})$.

On en déduit : $\frac{d\lambda}{dX} = \frac{4 X^2 \cdot (\arcsin(X) - X \cdot \sqrt{1-X^2})}{\Xi^2 \sqrt{1-X^2}} > 0$. Ainsi la quantité X croît lors de la contraction.

• Ceci signifie que le rayon R se rapproche de la limite. Ainsi, il pourrait se former de "trous noirs" par "contraction" d'un astre.

• D'un autre point de vue, on montre de même que la masse externe $M = M(R) = \frac{4\pi}{\chi c^2} \lambda R^3 = \frac{4\pi}{\chi c^2} \frac{X^3}{\sqrt{\lambda}}$

décroît aussi. Ceci est logique puisque $M = \sum m + \frac{E}{c^2}$ avec une énergie gravitationnelle négative dont la valeur absolue augmente. Si de la matière "très compacte" existe (plasma de quarks ?) permettant une masse volumique extrêmement grande, alors l'astre "très compact" qui en résulterait répondrait effectivement à un modèle d'astre quasi ponctuel, mais avec une masse M tendant vers zéro, ce qui semble plutôt dénué d'intérêt.

♦ remarque : avec un nombre de particules : $N = \int_0^R n(r') \sqrt{C(r')} 4\pi r'^2 dr'$ l'énergie de masse des particules est $N m c^2$; l'énergie gravitationnelle correspond à $E_G = [M - \sum m] c^2$, ce qui peut s'écrire $E_G = \int_0^R \mu(r') (1 - \sqrt{C(r')}) 4\pi r'^2 dr'$; l'énergie thermique est $E_T = [\sum m - N m] c^2$ par conséquent $E_T = \int_0^R (\mu(r') - n(r') m) \sqrt{C(r')} 4\pi r'^2 dr'$; l'étude d'un effondrement du système "isolé" ne peut se faire à énergie $E = E_G + E_T = [M - N m] c^2$ constante, car avec N fixé cela correspondrait à M constante ; il faudrait prendre en compte l'énergie du champ extérieur.

VIII. Masse et rayon d'un astre à la limite de stabilité ("trou sombre")

1. • Pour une masse volumique uniforme, la masse externe est $M = M(R) = \frac{4\pi}{\chi c^2} \lambda R^3 = \frac{4\pi}{\chi c^2} R X^2$ (en notant $\lambda = \frac{\chi \mu c^2}{3}$ et $X = R \sqrt{\lambda}$).
 • Pour un astre à la limite de stabilité $X = 1$ et $M = \frac{4\pi}{\chi c^2} R$. Par ailleurs $\mu = \frac{3\lambda}{\chi c^2} = \frac{3}{\chi c^2 R^2}$.
- 2.a. • Le rayon est : $R = \frac{\chi c^2 M}{4\pi} = 8.10^6 \text{ km}$; la masse volumique est : $\mu = 2,6.10^6 \text{ kg.m}^{-3}$.
 • Cette masse volumique est intermédiaire entre celle des étoiles "ordinaires" et celle des naines blanches ; la matière y est très loin de la concentration maximale que permettent les interactions corpusculaires (et la pression interne ne peut probablement pas expliquer un tel écart).
 • On peut imaginer que ce soit un "gaz" de naines sombres, donc la concentration ne peut augmenter car sinon la gravitation deviendrait répulsive.
 • Si on suppose les "constituants" semblables aux naines blanches ($\mu \approx 10^9 \text{ kg.m}^{-3}$), alors la distance moyenne les séparant est environ sept fois leur rayon ($R \approx 10^4 \text{ km}$). Cela semble impossible car les collisions (forcément très violentes, donc visibles) y seraient fréquentes.
 • Si on suppose les "constituants" semblables aux étoiles à neutrons ($\mu \approx 5.10^{17} \text{ kg.m}^{-3}$), alors la distance moyenne les séparant est environ 6000 fois leur rayon ($R \approx 5 \text{ km}$). Cela semble éventuellement plus plausible, sans être tout à fait convaincant.
- 2.b. • Le rayon est : $R = \frac{\chi c^2 M}{4\pi} = 3.10^{12} \text{ km}$; la masse volumique est : $\mu = 18 \text{ kg.m}^{-3}$.
 • Cette masse volumique est extrêmement faible (et la pression interne ne peut probablement pas expliquer un tel écart).
 • On peut imaginer que ce soit un "gaz" de naines sombres, donc la concentration ne peut augmenter car sinon la gravitation deviendrait répulsive.
 • Si on suppose les "constituants" semblables aux naines blanches ($\mu \approx 10^9 \text{ kg.m}^{-3}$), alors la distance moyenne les séparant est environ 380 fois leur rayon ($R \approx 10^4 \text{ km}$). Cela semble relativement peu plausible, car les collisions (forcément très violentes, donc visibles) n'y seraient probablement pas assez rares.
 • Si on suppose les "constituants" semblables aux étoiles à neutrons ($\mu \approx 5.10^{17} \text{ kg.m}^{-3}$), alors la distance moyenne les séparant est environ 300000 fois leur rayon ($R \approx 5 \text{ km}$). Cela semble éventuellement plausible. Il serait même éventuellement possible qu'un objet passant au voisinage de la périphérie puisse "traverser" la couche proche de la surface sans forcément faire d'interaction violente.

IX. Astre solide simple en coordonnées "isotropes"

1. • En coordonnées "classiques", on obtient à l'extérieur $C(r) = \frac{r}{r-r_s}$. Pour une masse volumique uniforme, on peut écrire $r_s = a(R) = \lambda R^3$ avec $\lambda = \frac{\chi \mu c^2}{3}$.
 • Le passage en coordonnées "isotropes" impose : $C(r) \left(dr^2 + \frac{r^2}{c(r)} d\Omega^2 \right) = \underline{C}(\underline{r}) \left(d\underline{r}^2 + \underline{r}^2 d\Omega^2 \right)$.
 • L'égalité pour tout déplacement impose : $\frac{dr}{\sqrt{r \cdot (r-r_s)}} = \pm \frac{d\underline{r}}{\underline{r}}$; ainsi : $r = \frac{(\underline{r} + \underline{r}_s)^2}{\underline{r}}$ avec $\underline{r}_s = \frac{r_s}{4}$.
 • On obtient ainsi : $\underline{C}(\underline{r}) = \left(\frac{\underline{r} + \underline{r}_s}{\underline{r}} \right)^4$; d'après $A(r) = \frac{1}{c(r)} = \frac{r-r_s}{r}$ on déduit alors : $A(\underline{r}) = \frac{(\underline{r} - \underline{r}_s)^2}{(\underline{r} + \underline{r}_s)^2}$.
 • On constate qu'il n'y a pas de difficulté pour $\underline{r} = \underline{r}_s$, en ce sens que les valeurs $\underline{r} < \underline{r}_s$ sont accessibles, mais elles correspondent toutefois à $r > r_s$. En fait dans cette zone $\frac{dr}{\sqrt{r \cdot (r-r_s)}} = -\frac{d\underline{r}}{\underline{r}}$.
 ♦ remarque : on obtient aussi $\underline{r} = \frac{1}{2} \left(\left(r - \frac{r_s}{2} \right) \pm \sqrt{r \cdot (r-r_s)} \right) = \frac{1}{8} \frac{r_s^2}{\left(r - \frac{r_s}{2} \right) \mp \sqrt{r \cdot (r-r_s)}}$.
- 2.a. • En coordonnées "classiques", on obtient $C(r) = \frac{r}{r-a(r)}$. Pour une masse volumique uniforme, on peut écrire $a(r) = \lambda r^3$ avec $\lambda = \frac{\chi \mu c^2}{3}$. Ainsi $C(r) = \frac{1}{1-\lambda r^2}$.

- Le passage en coordonnées “isotropes” impose ici : $\frac{dr}{r\sqrt{1-\lambda r^2}} = \pm \frac{dr}{r}$; ainsi : $\sqrt{1-\lambda r^2} = \pm \frac{r_1^2 - r^2}{r_1^2 + r^2}$ où r_1 est la valeur de r pour laquelle $r = a(r)$.
- On en déduit : $r = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{2r_1}{r_1^2 + r^2}$; $r = r_1 \frac{1 \pm \sqrt{1-\lambda r^2}}{r\sqrt{\lambda}}$. On retrouve que r tend vers zéro quand r tend vers zéro, mais r décroît pour $r > r_1$; ceci correspond à l'existence d'une singularité atteinte par valeurs inférieures pour $r = a(r)$.
- On obtient ensuite : $\underline{C}(r) = \frac{[r(r)]^2}{r^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{4r_1^2}{(r^2 + r_1^2)^2}$. Le raccordement avec le cas extérieur doit se faire par continuité de \underline{C} et de sa dérivée ; contrairement au cas “classique”, la condition d'isotropie impose la continuité de la dérivée de \underline{C} à cause de celle de $\underline{D} = \underline{C} r^2$.
- En notant $\underline{R} = \underline{r}(R)$ le raccordement de \underline{C} correspond à : $\frac{1}{\lambda} \frac{4r_1^2}{(\underline{R}^2 + r_1^2)^2} = \left(\frac{\underline{R} + r_s}{\underline{R}}\right)^4$; le raccordement de la dérivée impose : $\frac{1}{\lambda} \frac{4r_1^2 \underline{R}}{(\underline{R}^2 + r_1^2)^3} = \frac{r_s \cdot (\underline{R} + r_s)^3}{\underline{R}^5}$. La résolution de ce système de deux équations donne : $r_1 = \sqrt{\frac{R^3}{r_s}} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{R^3}{R^3}}$.
- Les astres instables correspondent aux cas avec $\underline{R} < r_s$ (en deçà de la singularité externe) et $\underline{R} > r_1$ (au delà de la singularité interne) ; la relation précédente montre que ces deux conditions sont identiques.
- En raisonnant sur l'expression interne, on obtient : $\underline{D}'(\underline{R}) = \frac{1}{\lambda} \frac{8r_1^2 r \cdot (r_1^2 - R^2)}{(r_1^2 + R^2)^3}$; ceci montre que \underline{D} est dans ce cas décroissant au niveau du raccordement, comme c'est le cas pour $D(r) = r^2$ en coordonnées “classiques”.

- 2.b. • Pour étudier $A(r)$ à l'intérieur, on peut repartir de l'équation $\frac{A'}{A} + \frac{D'}{2D} = \frac{2C}{D}$ avec la condition isotrope $\underline{D} = \underline{C} r^2$. On obtient ainsi : $A(r) = Cste \cdot \frac{r_1^2 + r^2}{r_1^2 - r^2}$.
- Dans le cas stable, on peut déterminer la constante d'intégration par raccordement, mais il peut suffire ici de vérifier qu'on retrouve en fait $A(r) = \alpha_0 \frac{r_1^2 + r^2}{r_1^2 - r^2} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{1-\lambda r^2}}$ comme cela est obtenu en coordonnées “classiques”, avec $\alpha_0 = A(0) = [A(R)]^{3/2}$.
 - Pour le cas instable, “la” constante d'intégration n'est toutefois pas évidente. De même qu'en coordonnées “classiques” il apparaît une ambiguïté de signe dans la partie extérieure, selon le sens de variation de r , il y a ici une ambiguïté analogue à l'intérieur en coordonnées “isotropes”. Dans la mesure où il y a divergence de $A(r)$ pour $r = r_1$, la constante d'intégration n'est pas forcément la même de part et d'autre.
 - La comparaison avec la relation en coordonnées “classiques”, associée à l'analogie avec le cas stable, permet d'écrire plus généralement : $A(r) = \alpha_0 \frac{r_1^2 + r^2}{|r_1^2 - r^2|} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{1-\lambda r^2}}$. On constate de façon analogue le champ gravitationnel répulsif ($A' < 0$) dans la zone entre les singularités.
 - On peut préciser qu'à l'intérieur : $d\rho = \pm \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \frac{r_1 dr}{r_1^2 + r^2}$; $\rho = \pm \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \arctan\left(\frac{r}{r_1}\right)$; $r = r_1 \tan\left(\frac{\rho\sqrt{\lambda}}{2}\right)$. De ce fait la limite $r = r_1$ peut être dépassée, contrairement à la limite $r = a(r)$.

X. Astre solide simple en coordonnées “radiales”

1. • En coordonnées “classiques”, on obtient à l'extérieur $C(r) = \frac{r}{r-r_s}$. Pour une masse volumique uniforme, on peut écrire $r_s = a(R) = \lambda R^3$ avec $\lambda = \frac{\chi \mu c^2}{3}$.
- En coordonnées “radiales” : $d\rho = \pm \frac{\sqrt{r} dr}{\sqrt{r-r_s}}$; ainsi : $\rho = \pm \left(r_s \operatorname{artanh}\left(\sqrt{\frac{r-r_s}{r}}\right) + \sqrt{r \cdot (r-r_s)} \right) + Cste$; la relation inverse permettant de substituer $r(\rho)$ dans les expressions de $C(r)$ et $A(r)$ n'est pas simple.

• On peut alors chercher à résoudre l'équation : $-\frac{D''}{D} + \left(\frac{D'}{2D}\right)^2 + \frac{1}{D} = 0$ (à l'extérieur) ; il n'y a toutefois pas de solution simple. On peut chercher des solutions sous la forme $D = e^{2\beta}$; cela donne l'équation : $2\beta'' + 3\beta'^2 - e^{-2\beta} = 0$ qui n'est pas plus facile à résoudre. On est donc réduit à la résolution numérique, ou bien au choix d'une autre coordonnée que ρ (les choix "classique" ou "isotrope" sont pratiques).

- 2.a. • Puisqu'en coordonnées "classiques" on obtient $\rho = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arcsin(r\sqrt{\lambda})$ et $D(r) = r^2$, on peut vérifier ici que $D(\rho) = \frac{1}{\lambda} \sin^2(\rho\sqrt{\lambda})$ est solution de l'équation $-\frac{D''}{D} + \left(\frac{D'}{2D}\right)^2 + \frac{1}{D} = 3\lambda$ (à l'intérieur).
- Les astres instables correspondent aux cas avec $P > \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$ (au delà de la singularité interne), avec $P = \rho(R)$, mais ceci correspond à $R < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ car r et $D(\rho)$ décroissent dans cette zone.
- 2.b. • Pour étudier $A(\rho)$ à l'intérieur, on peut repartir de l'équation $\frac{A'}{A} + \frac{D'}{2D} = \frac{2}{D'}$. Compte tenu de l'expression de $D(\rho)$ on obtient ainsi : $\frac{A'}{A} = \frac{\sqrt{\lambda} \sin(\rho\sqrt{\lambda})}{\cos(\rho\sqrt{\lambda})}$ puis $A(\rho) = \frac{Cste}{\cos(\rho\sqrt{\lambda})}$.
- Pour le cas stable, on peut déterminer la constante d'intégration par raccordement, mais il peut suffire ici de vérifier qu'on retrouve en fait $A(\rho) = \frac{\alpha_0}{\cos(\rho\sqrt{\lambda})} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{1-\lambda r^2}}$ comme cela est obtenu en coordonnées "classiques", avec $\alpha_0 = A(0) = [A(P)]^{3/2}$.
- Pour le cas instable, on peut écrire plus généralement : $A(\rho) = \frac{\alpha_0}{|\cos(\rho\sqrt{\lambda})|} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{1-\lambda r^2}}$; on constate de façon analogue la divergence pour $\rho = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$ et le champ gravitationnel répulsif ($A' < 0$) dans la zone entre les singularités.

XI. Étude de la pression

- À l'extérieur de l'astre, la pression est nulle.

• À l'intérieur, on obtient : $\frac{2p'}{p+\varepsilon} + \frac{A'}{A} = 0$, puis $A(r) \cdot (p + \varepsilon)^2 = Cste = A(R) \varepsilon^2$.

• La simplification aboutit à : $p(r) = \frac{3\lambda}{\chi} \left(\frac{\sqrt{1-\lambda r^2}}{\sqrt{1-\lambda R^2}} - 1 \right)$.
- On constate que $p(r) < 0$ quand $r > R$. Cette condition sur r serait réalisée pour un astre dépassant la limite de stabilité prévue (champ de gravitation devenant répulsif), mais le résultat alors obtenu pour $p(r)$ n'est pas forcément incohérent dans la mesure où la pression a été calculée en supposant une condition d'équilibre, qui ne pourrait forcément pas être vérifiée dans ce cas.

• Entre autres, le calcul de la constante d'intégration, basé sur $p(r) = 0$ en surface, impose alors en même temps $p(r) = 0$ pour $r = R$ à l'intérieur. Or un équilibre imposerait au contraire $p(r) = 0$ à la limite où le champ deviendrait infiniment répulsif ; cela correspondrait forcément à un déséquilibre extérieur et éventuellement un équilibre intérieur mais avec une pression infinie.

• Quoi qu'il en soit, l'équilibre pose de toute façon problème car même pour $p \ll \mu c^2$ on obtiendrait la relation $A(r) \varepsilon^2 = Cste$, donc $A(r)$ uniforme si la masse volumique est uniforme. En cas d'équilibre, c'est donc au contraire p qui devrait être "responsable" des variations de $A(r)$.
- On constate que la pression est maximale au centre ($r = 0$) et que $p \ll \mu c^2 = \frac{3\lambda}{\chi}$ correspond à $1 - \lambda R^2 \gg \frac{1}{16}$ donc $R \ll \sqrt{\frac{15}{16}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Cette condition montre que seuls les astres très en deçà de la limite de stabilité peuvent être décrits ainsi (on exclut les astres vérifiant cette condition, mais au delà de la limite, puisque le raisonnement sur la pression montre que la zone dépassant la limite serait forcément instable). Une étude complète nécessite donc une prise en compte de la pression.
- On peut éventuellement utiliser ce modèle simple afin de décrire une première approximation post newtonienne pour de petits astres, mais l'intérêt en reste forcément limité dans la mesure où les faibles corrections relativistes ne sont pas les aspects les plus utiles dans l'étude de tels astres.