CHAMP CENTRAL INTÉRIEUR “SANS PRESSION” - exercices

I. Astre solide “simple”

1. • Estimer l'ordre de grandeur de la pression p au centre de la Terre, puis vérifier que $p \ll \mu\, c^2$.

2. • Procéder de même pour le Soleil.

3. • Effectuer un raisonnement analogue pour une naine blanche ; conclure.

4. • Effectuer un raisonnement analogue pour une étoile à neutrons ; conclure.

Données : célérité de la lumière : $c \approx 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$;

estimations des paramètres	Terre	Soleil	Naine blanche	Étoile à neutrons
Masse volumique moyenne μ	5.10^3 kg.m^{-3}	$1{,}5.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$	10^9 kg.m^{-3}	$5.10^{17} \text{ kg.m}^{-3}$
Rayon R	6400 km	6.10^5 km	10^4 km	5 km
Pesanteur en surface g	10 m.s^{-2}	300 m.s^{-2}	2.10^6 m.s^{-2}	10^{12} m.s^{-2}

II. Astre solide “simple”

1. • On étudie le comportement qualitatif d'un petit astre en négligeant les termes de pression dans le tenseur énergie-impulsion : $T^{\alpha\beta} = \mu\, U^\alpha\, U^\beta$, où μ désigne la masse volumique du solide, ici immobile. Écrire les équations du champ pour une métrique de la forme : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - D(r)\, d\Omega^2$.

2. • Montrer qu'on peut en déduire, entre autres :

$$\frac{D'}{2}\left(\frac{A'}{A} + \frac{D'}{2\,D}\right) = C \quad ; \quad -\frac{D''}{C\,D} + \frac{D'}{2\,C\,D}\left(\frac{C'}{C} + \frac{D'}{2\,D}\right) + \frac{1}{D} = \chi\, \mu\, c^2 .$$

III. Couche sphérique

• Déterminer le champ intérieur pour une masse répartie sous forme d'une couche sphérique. Commenter en comparant au cas non relativiste décrit par le théorème de Gauss.

IV. Astre solide “simple” en coordonnées “classiques”

• On étudie le comportement qualitatif d'un petit astre en négligeant les termes de pression dans le tenseur énergie-impulsion : $T^{\alpha\beta} = \mu\, U^\alpha\, U^\beta$, où μ désigne la masse volumique du solide, ici immobile.

• Pour une métrique de la forme : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - D(r)\, d\Omega^2$, les équations du champ s'écrivent sous la forme : $\frac{D'}{2}\left(\frac{A'}{A} + \frac{D'}{2\,D}\right) = C$; $-\frac{D''}{C\,D} + \frac{D'}{2\,C\,D}\left(\frac{C'}{C} + \frac{D'}{2\,D}\right) + \frac{1}{D} = \chi\, \mu\, c^2$.

1. a) Étudier le cas particulier où $D = r^2$, d'abord sans distinguer l'intérieur et l'extérieur de l'astre.
   b) Vérifier qu'on retrouve à l'extérieur l'expression “classique”.

2. a) Préciser l'étude à l'intérieur, dans le cas particulier d'un astre de masse volumique uniforme.
   b) Commenter les cas correspondant aux ordres de grandeurs ci-après.

Données : constante de gravitation : $\chi \approx 2{,}07.10^{-43} \text{ kg}^{-1}.\text{m}^{-1}.\text{s}^2$;

estimations des paramètres	Terre	Soleil	Naine blanche	Étoile à neutrons
énergie volumique moyenne $\mu\, c^2$	$5.10^{20} \text{ J.m}^{-3}$	$1{,}4.10^{20} \text{ J.m}^{-3}$	$1{,}4.10^{26} \text{ J.m}^{-3}$	$5.10^{34} \text{ J.m}^{-3}$
Rayon R	6400 km	6.10^5 km	10^4 km	5 km

V. Intégrale sur la surface d'une sphère

1. • En raisonnant initialement avec des coordonnées sphériques “usuelles” $(R\ ;\ \theta\ ;\ \phi)$, on étudie la surface d'un sphère de rayon R .

a) Exprimer la longueur d'un cercle “parallèle” d'angle θ par rapport au pôle nord.

b) Pour décrire un tel cercle, on souhaite utiliser comme coordonnée “radiale” r (sur la sphère selon un méridien) ce que serait le rayon d'un cercle de même circonférence dans un plan. Exprimer r , puis ré-exprimer la métrique sur la sphère avec cette notation.

c) Expliquer pourquoi une telle notation est ambiguë pour décrire les cercles parallèles de l'hémisphère sud $(\theta > \frac{\pi}{2})$.

2. • Pour un espace ayant cette géométrie (donnée), on considère une répartition de masse à symétrie “circulaire” autour du pôle nord, de masse surfacique σ uniforme.

a) Exprimer la quantité $M(r) = \int_0^r \sigma(r')\ 2\pi\ r'\ dr'$.

b) Commenter le cas où la limite passe dans l'hémisphère sud.

c) Proposer une méthode pour compenser le comportement étrange précédent.

d) En raisonnant de façon analogue au “théorème de Gauss”, commenter le comportement correspondant.

VI. Géométrie spatiale

1. • On étudie un astre statique à symétrie sphérique, avec une masse volumique uniforme et en négligeant l'effet de la pression.

• Pour représenter l'effet du champ gravitationnel, on peut tenir compte du fait que pour un champ statique la quantité $\ln(\sqrt{A})$ se comporte comme un potentiel de gravitation ; il est alors possible d'utiliser l'analogie avec le potentiel de gravitation newtonien, qui au voisinage du sol est proportionnel à l'altitude z (cela a pour seul intérêt de s'appuyer sur notre habitude intuitive qualitative).

• On ne peut pas obtenir une représentation simple de l'effet dans $\mathbb{R}^3$, mais on peut utiliser des coordonnées cylindriques pour réaliser une image $3D$ (en perspective). Représenter ainsi $z = \ln(\sqrt{A})$ en fonction de coordonnées polaires ρ et θ , où $\rho = \int \sqrt{C}\ dr$ est le “rayon interne”.

2. • On souhaite maintenant obtenir une représentation géométrique de la courbure d'un plan de l'espace en l'incluant en tant que surface dans $\mathbb{R}^3$. On peut de même utiliser des coordonnées cylindriques pour réaliser une image $3D$ (en perspective)

• Représenter ainsi une surface d'équation $z = z(r)$ en fonction de coordonnées polaires r et θ , de telle façon que la distance radiale sur la surface soit égale au “rayon interne” ρ .

3. • Décrire qualitativement comment un observateur percevrait l'espace dans la zone intérieure à la singularité.

VII. Masse “interne” et masse “externe”

1. • On étudie un astre statique à symétrie sphérique. En raisonnant avec les coordonnées “classiques”, la métrique (tant intérieure qu'extérieure) peut se calculer à partir de l'intégrale $M(r) = \int_0^r \mu(r')\ 4\pi\ r'^2\ dr'$. Par comparaison avec le champ extérieur, qu'il est possible de trouver sans considérer le cas intérieur, cette quantité correspond à la masse “vue de l'extérieur” du volume considéré.

a) Justifier que cette quantité n'est pas la somme des masses intérieures $\sum m\ (r)$.

b) En déduire l'expression de l'énergie d'interaction gravitationnelle $E(r)$ entre les masses intérieures.

2. • On étudie le cas particulier avec masse volumique μ uniforme.
a) Préciser les expressions des quantités précédentes dans ce cas.
b) Comparer graphiquement leurs variations ; commenter.

◊ indication : la métrique intérieure correspond à $C(r) = \frac{1}{1-\lambda\, r^2}$ avec $\lambda = \frac{\chi\, \mu\, c^2}{3}$.

3. • Un passage à la limite permet-il de retrouver le modèle d'un astre ponctuel ?

VIII. Masse et rayon d'un astre à la limite de stabilité (“trou sombre”)

1. • On étudie un astre statique à symétrie sphérique ; on raisonne avec les coordonnées “classiques” et on suppose la masse volumique uniforme.
• Étudier les relations entre la masse, le rayon et la masse volumique d'un astre à la limite de stabilité.

2. a) Les observations semblent montrer qu'il existe au centre de la voie lactée un corps attracteur, dont la masse est $M = (2{,}6 \pm 0{,}2).10^6\, M_S$ avec la masse solaire $M_S = 2.10^{30}$ kg . Estimer son rayon et sa masse volumique ; commenter.
b) Les corps les plus massifs observés, soupçonnés d'être des “trous noirs”, correspondent à des masses $M \approx 10^9\, M_S$. Estimer leurs rayons et leurs masses volumiques ; commenter.

Données : naines blanches : $\mu \approx 10^9\ \mathrm{kg.m^{-3}}$; $R \approx 10^4$ km ;
étoiles à neutrons : $\mu \approx 5.10^{17}\ \mathrm{kg.m^{-3}}$; $R \approx 5$ km .

IX. Astre solide “simple” en coordonnées “isotropes”

• On étudie le comportement qualitatif d'un petit astre en négligeant les termes de pression dans le tenseur énergie-impulsion : $T^{\alpha\beta} = \mu\, U^\alpha\, U^\beta$, où μ désigne la masse volumique du solide, ici immobile.
• Pour une métrique de la forme : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - D(r)\, d\Omega^2$, les équations du champ s'écrivent sous la forme : $\frac{D'}{2}\left(\frac{A'}{A} + \frac{D'}{2\,D}\right) = C$; $-\frac{D''}{C\,D} + \frac{D'}{2\,C\,D}\left(\frac{C'}{C} + \frac{D'}{2\,D}\right) + \frac{1}{D} = \chi\, \mu\, c^2$.

1. • Étudier le cas particulier “isotrope” où $D = C\, r^2$ pour l'extérieur de l'astre.

2. a) Étudier $C(r)$ à l'intérieur, dans le cas particulier d'un astre de masse volumique uniforme.
b) Étudier $A(r)$ à l'intérieur ; commenter.

X. Astre solide “simple” en coordonnées “radiales”

• On étudie le comportement qualitatif d'un petit astre en négligeant les termes de pression dans le tenseur énergie-impulsion : $T^{\alpha\beta} = \mu\, U^\alpha\, U^\beta$, où μ désigne la masse volumique du solide, ici immobile.
• Pour une métrique de la forme : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - D(r)\, d\Omega^2$, les équations du champ s'écrivent sous la forme : $\frac{D'}{2}\left(\frac{A'}{A} + \frac{D'}{2\,D}\right) = C$; $-\frac{D''}{C\,D} + \frac{D'}{2\,C\,D}\left(\frac{C'}{C} + \frac{D'}{2\,D}\right) + \frac{1}{D} = \chi\, \mu\, c^2$.

1. • Étudier le cas particulier où $C = 1$ pour l'extérieur de l'astre (on note ρ la distance radiale).

2. a) Étudier $D(\rho)$ à l'intérieur, dans le cas particulier d'un astre de masse volumique uniforme.
b) Étudier $A(\rho)$ à l'intérieur ; commenter.

XI. Étude de la pression

• On étudie le comportement qualitatif d'un petit astre en négligeant les termes de pression dans le tenseur énergie-impulsion : $T^{\alpha\beta} = \mu\, U^\alpha\, U^\beta$, où μ désigne la masse volumique du solide, ici immobile.

• Pour simplifier le raisonnement qualitatif, on suppose qu'on peut se limiter au cas particulier d'une masse volumique uniforme.

• Pour une métrique de la forme : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2$, la résolution des équations aboutit à la solution : $A(r) = \frac{r - r_s}{r}$ à l'extérieur, avec $r_s = a(R)$, $a(r) = \lambda\, r^3$, $\lambda = \frac{\chi\, \varepsilon}{3}$; $A(r) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{1 - \lambda\, r^2}}$ à l'intérieur, avec $A(0) = \alpha_0 = [A(R)]^{3/2}$.

• Le fait d'avoir supposé pour simplifier $p \ll \varepsilon = \mu\, c^2$ (donc négligeable en comparaison) ne signifie pas que $p = 0$. En relativité générale, la loi d'équilibre statique, déduite de $D_\beta T^{\alpha\beta} = 0$, peut s'écrire : $p' = -(p + \varepsilon)\, \frac{A'}{2\, A}$.

1. • Calculer la pression $p(r)$.

2. • On constate que ce calcul donne $p(r) < 0$ dans certaines conditions ; commenter.

3. • Vérifier la condition imposée par l'hypothèse $p \ll \varepsilon$; conclure.

4. • Existe-t-il des cas intermédiaires où le modèle peut décrire une première approximation post newtonienne ?