

## RG XIV - CHAMP CENTRAL INTÉRIEUR “AVEC PRESSION”

### 1. Étude du cas statique intérieur

- Les équations du champ peuvent s'écrire  $R^{\alpha\beta} = \chi \cdot (T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} T)$ .

Par ailleurs :  $T^{\alpha\beta} = (p + \varepsilon_0) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}$ , où  $p$  et  $\varepsilon_0 = \mu_0 c^2$  désignent la pression et l'énergie volumique mesurées dans le référentiel propre du fluide, ici supposé immobile ( $\mu = \mu_0$ ).

- Avec une métrique de la forme :  $ds^2 = A(r) c^2 dt^2 - C(r) dr^2 - D(r) d\Omega^2$ , on obtient :  $u^0 = \frac{1}{\sqrt{A}}$  et  $u^k = 0$ .

Ceci correspond à :

$$\begin{aligned} T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T &= A \frac{\varepsilon + 3p}{2} ; \quad T_{11} - \frac{1}{2} g_{11} T = C \frac{\varepsilon - p}{2} ; \\ T_{22} - \frac{1}{2} g_{22} T &= D \frac{\varepsilon - p}{2} ; \quad T_{33} - \frac{1}{2} g_{33} T = D \sin^2(\theta) \frac{\varepsilon - p}{2} . \end{aligned}$$

Par ailleurs :  $R_{00} = \frac{A''}{2C} - \frac{A'}{2C} \left( \frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} - \frac{D'}{D} \right) ;$

$$R_{11} = -\frac{A''}{2A} - \frac{D''}{D} + \frac{A'}{2A} \left( \frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} \right) + \frac{D'}{D} \left( \frac{C'}{2C} + \frac{D'}{2D} \right) ;$$

$$R_{22} = -\frac{D''}{2C} - \frac{D'}{2C} \left( \frac{A'}{2A} - \frac{C'}{2C} \right) + 1 ; \quad R_{33} = R_{22} \sin^2(\theta) .$$

- Compte tenu des identités de Bianchi, les équations du champ ne sont pas indépendantes (c'est ce qui permet un choix de type de coordonnées). On peut mettre en évidence deux combinaisons permettant de simplifier :

$$\frac{D'}{2CD} \left( \frac{A'}{A} + \frac{D'}{2D} \right) - \frac{1}{D} = \chi p ; \quad -\frac{D''}{C} + \frac{D'}{2CD} \left( \frac{C'}{C} + \frac{D'}{2D} \right) + \frac{1}{D} = \chi \varepsilon .$$

- La prise en compte de la pression  $p = p(r)$  nécessite une équation supplémentaire. La conservation de l'énergie-impulsion s'écrit :  $D_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$  ; on en déduit la loi de la statique des fluides :  $p' = -(\varepsilon + p) \frac{A'}{2A}$ .

 *exercices n° I, II.*

## 2. Expression globale de la métrique en coordonnées “classiques”

- Dans le cas particulier  $D = r^2$  on obtient  $D' = 2r$  et  $D'' = 2$  ; ainsi :

$$\frac{1}{c r} \left( \frac{A'}{A} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \chi p \quad ; \quad \frac{1}{c} - \frac{r C'}{c^2} = 1 - \chi \varepsilon r^2 .$$

- La seconde équation conduit à :  $\frac{r}{c} = r - \chi c^2 \int \mu r^2 dr + Cste$  (comme dans le cas sans pression).

En posant :  $M(r) = \int_0^r \mu(r') 4\pi r'^2 dr'$  et  $a(r) = \frac{\chi c^2}{4\pi} M(r) = \frac{2G}{c^2} M(r)$  , on obtient :  $C(r) = \frac{r}{r-a(r)}$  .

- Le report dans la première équation, puis dans la loi de la statique, donne (variante de l'équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff) :

$$p' = -\frac{\varepsilon+p}{2} \frac{a(r)+\chi r^3 p}{r.(r+a(r))} .$$

Ainsi, par exemple, la connaissance de  $\mu(r)$  permet de calculer  $a(r)$  et  $C(r)$  en intégrant depuis  $a(0) = 0$  , puis  $p(r)$  en intégrant depuis  $p(R) = 0$  , puis  $A(r)$  en intégrant d'après la loi de la statique :  $\frac{A'}{A} = -\frac{2p'}{\varepsilon+p}$  .

Il subsiste toutefois en général une difficulté : pour un fluide compressible, la masse volumique dépend de la pression, donc on ne la connaît pas a priori. Il faut alors supposer une loi de compressibilité (relation entre  $\mu$  et  $p$  ) et intégrer le système des deux équations correspondantes (puis on en déduit  $A$  ).

## 3. Masse volumique uniforme

### 3.1. Étude générale

- Pour une masse volumique uniforme (ce qui peut être une bonne première approximation qualitative) :  $a(r) = \lambda r^3$  avec  $\lambda = \frac{\chi \varepsilon}{3}$  .

Ainsi  $C(r) = \frac{r}{r-a(r)} = \frac{1}{1-\lambda r^2}$  ; ce qui impose  $r < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  .

◇ remarque : de façon générale,  $\varepsilon$  indépendant de  $p$  a l'avantage que la pression n'influence pas la géométrie spatiale décrite par  $C$  .

• On obtient ensuite :  $p' = -\frac{3\lambda+\chi p}{2\chi} (\lambda + \chi p) \frac{r}{1-\lambda r^2}$  ;  

$$\frac{2\chi p'}{(\lambda+\chi p)(3\lambda+\chi p)} = -\frac{r}{1-\lambda r^2} .$$

Pour un astre en équilibre, la limite  $p(R) = 0$  conduit à :

$$p = \frac{3\lambda}{\chi} \left( \frac{\sqrt{1-\lambda r^2} - \sqrt{1-\lambda R^2}}{3\sqrt{1-\lambda R^2} - \sqrt{1-\lambda r^2}} \right) .$$

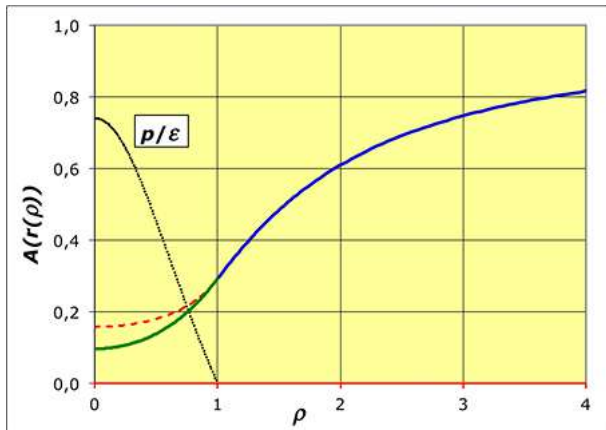
• On obtient ensuite  $\frac{A'}{A} = -\frac{2p'}{\varepsilon+p} = \frac{2\lambda r}{\sqrt{1-\lambda r^2} (3\sqrt{1-\lambda R^2} - \sqrt{1-\lambda r^2})}$  ; l'intégration donne  
 ainsi :  $A = Cste \cdot (3\sqrt{1-\lambda R^2} - \sqrt{1-\lambda r^2})^2$  .

Le raccordement doit par ailleurs donner :  $A(R) = \frac{1}{c(R)} = 1 - \lambda R^2$  d'où finalement :  $A = \frac{1}{4} (3\sqrt{1-\lambda R^2} - \sqrt{1-\lambda r^2})^2$  .

 *exercice n° III.*

### 3.2. Cas “simples”

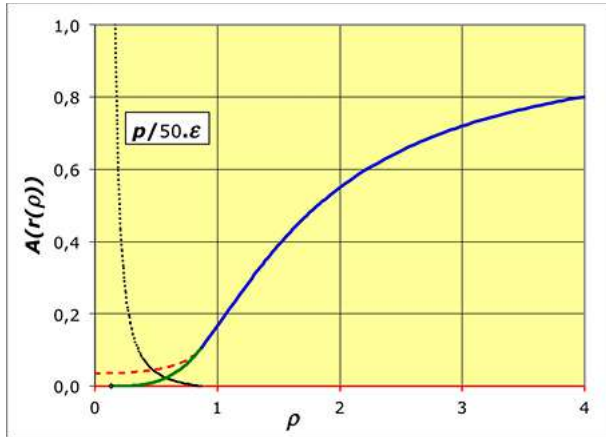
• Dans les cas simples, avec  $\frac{dr(\rho)}{d\rho} > 0$  partout, c'est-à-dire  $P = \rho(R) < \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$  et  
 ainsi  $r \leq R < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ , le numérateur de l'expression de  $p$  reste partout positif.



On constate que la pression contribue en augmentant le champ intérieur : la diminution de  $A$  est indiquée en comparant au cas sans pression en tirets.

La représentation de la pression (en proportion de  $\varepsilon$  ici constante) signale toutefois que ce modèle n'est déjà plus vraiment approprié : la limite ultra-relativiste  $p \approx \frac{\varepsilon}{3}$  est dépassée.

• Il apparaît en outre que la pression ne peut même pas toujours être définie dans la zone centrale : l'expression diverge pour  $r \leq r_d = \sqrt{9 R^2 - \frac{8}{\lambda}}$ .



La divergence peut être évitée en imposant  $r_d < 0$ , donc  $R < \sqrt{\frac{8}{9} \frac{1}{\lambda}} \approx \frac{0.94}{\sqrt{\lambda}}$ , ce qui montre bien la nette limitation des hypothèses utilisées ici. Il faut par conséquent résoudre en ajoutant une équation d'état thermodynamique entre  $p$  et  $\varepsilon$ , respectant la limite ultra-relativiste (on ne constate alors aucun effet de divergence de  $p$  autre qu'éventuellement à l'origine).

♦ remarque : des conditions très générales conduisent à la même limite  $R < \sqrt{\frac{8}{9} \frac{1}{\lambda}}$  ; au delà, la pression diverge forcément, au moins au centre de l'astre ; il s'agit donc d'une limite physique relativement “fondamentale”.

◇ remarque : la limite non ultra-relativiste correspond à :

$$p = \frac{3\lambda}{\chi} \left( \frac{\sqrt{1-\lambda r^2} - \sqrt{1-\lambda R^2}}{3\sqrt{1-\lambda R^2} - \sqrt{1-\lambda r^2}} \right) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{donc} \quad r > r_{nr} = \sqrt{\frac{9}{4} R^2 - \frac{5}{4\lambda}} ;$$

$$r_{nr} < 0 \quad \text{correspond à : } R < \sqrt{\frac{5}{9} \frac{1}{\lambda}} \approx \frac{0,75}{\sqrt{\lambda}} .$$

 *exercice n° IV.*

#### 4. Fluide ultra-relativiste

• Dans la mesure où, en thermodynamique “classique”, les rééquilibrages thermiques sont beaucoup plus lents que les rééquilibrages de pression, on peut chercher les propriétés qualitatives principales des équilibres en raccordant les solutions précédentes avec celles du cas ultra-relativiste.

• Compte tenu de la relation  $\frac{da(r)}{dr} = \chi r^2 \varepsilon$  ; le cas ultra-relativiste  $p = \frac{\varepsilon}{3}$  permet d'écrire l'équation :  $p' = -\frac{\varepsilon+p}{2} \frac{a(r)+\chi r^3 p}{r \cdot (r-a(r))}$  sous la forme :

$$3 a'' r \cdot (r - a) = 2 a' \cdot (3 r - 6 a - r a') .$$

La seule solution physiquement acceptable respectant la limite  $a(0) = 0$  est :  $a(r) = \frac{3}{7} r$  . Cela correspond à une densité volumique d'énergie  $\varepsilon(r) = \frac{3}{7\chi r^2}$  divergente à l'origine (mais intégrable).

◇ remarque : la divergence de  $\varepsilon(r)$  à l'origine ne signifie pas que la concentration de particules diverge, car l'énergie relativiste inclut l'énergie thermique ; c'est surtout que la température tend vers l'infini à l'origine (et la pression aussi).

• Puisque la pression tend vers zéro à la surface d'un astre, on peut y raisonner qualitativement avec un modèle de masse volumique uniforme. Les astres dont le centre est ultra-relativiste (étoiles à neutrons) ne le sont donc forcément pas jusqu'en périphérie : il faut effectuer un “raccordement” des modèles.

• Dans la mesure où l'équilibre doit correspondre à une masse volumique croissant vers le centre, le raccordement impose  $\varepsilon(r) = \frac{3}{7\chi r^2} \geq \varepsilon_R = \varepsilon(R)$  .

Ceci donne :  $r \leq r_{ur} = \sqrt{\frac{1}{7} \frac{1}{\lambda}} \approx \frac{0,38}{\sqrt{\lambda}} .$

Il faut alors que la pression ne diverge pas dans la partie périphérique :

$$r_{ur} = \sqrt{\frac{9}{4} R^2 - \frac{5}{4\lambda}} < \sqrt{\frac{1}{7} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}} = r_{ur} ; \text{ ceci impose : } R < \sqrt{\frac{39}{63} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \approx \frac{0,79}{\sqrt{\lambda}} .$$

Il apparaît donc qu'on ne peut pas éliminer l'existence d'une limite supérieure du rayon d'un astre stable, limite strictement inférieure à  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  (où ici  $\lambda = \frac{\chi \varepsilon_R}{3}$  correspond à la masse volumique périphérique "moyenne").

• Pour décrire la transition vers le comportement ultra-relativiste au centre, on peut proposer une modélisation de l'effet de la pression.

Des lois "polytropiques"  $p \propto \varepsilon^\gamma$  (avec une constante  $\gamma$  dépendant du type d'astre) sont suggérées par un certain nombre de propriétés physiques. Ceci correspond à une limite de type gazeux pour  $p \rightarrow 0$ .

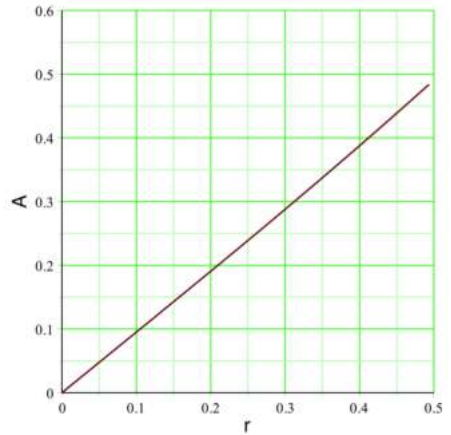
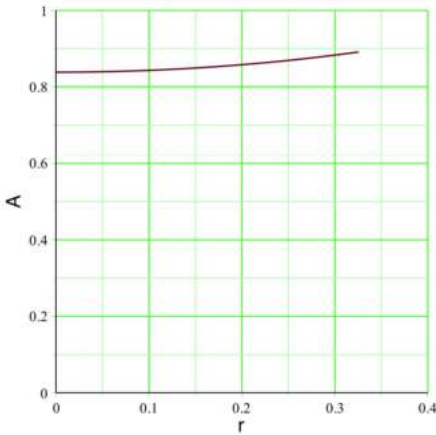
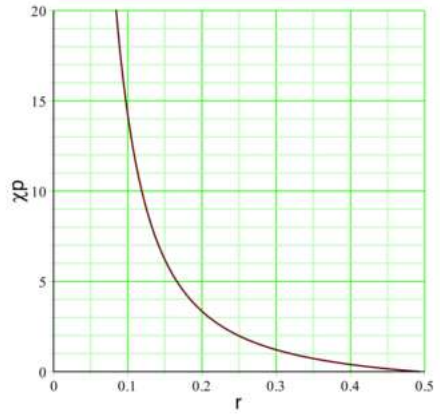
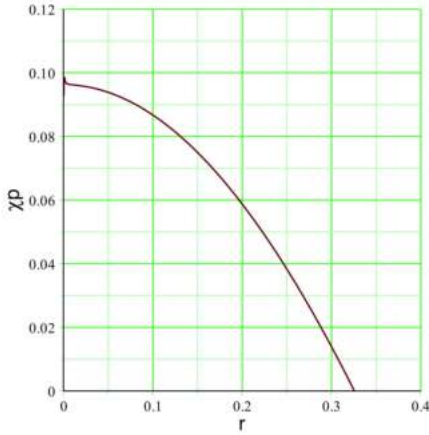
Ici on considère une limite mathématique telle que  $T = T^\mu_\mu \rightarrow 0$  (donc  $\varepsilon \approx 3p$ ) pour  $p \rightarrow \infty$ , avec  $\varepsilon = \varepsilon_R$  pour  $p = 0$  (matière en phase condensée), tout en respectant  $c_{son} \approx \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \mu}} \lesssim c$ . On peut pour cela proposer qualitativement :  $\varepsilon(r) = 3p + \frac{\varepsilon_R^2}{\varepsilon_R + p}$ .

On obtient ainsi une équation analogue à celle du cas ultra-relativiste :

$$\begin{aligned} 12 (a'' r - 2 a') (r - a) [a' + 9 \lambda r^2 + \sqrt{a'^2 + 18 a' \lambda r^2 - 27 \lambda^2 r^4}] = \dots \\ - \sqrt{a'^2 + 18 a' \lambda r^2 - 27 \lambda^2 r^4} \times \dots \\ [7 a' - 9 \lambda r^2 + \sqrt{a'^2 + 18 a' \lambda r^2 - 27 \lambda^2 r^4}] \times \dots \\ (6 a + r. [a' - 9 \lambda r^2 + \sqrt{a'^2 + 18 a' \lambda r^2 - 27 \lambda^2 r^4}]) . \end{aligned}$$

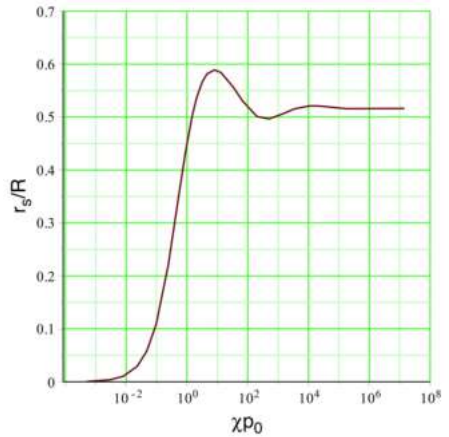
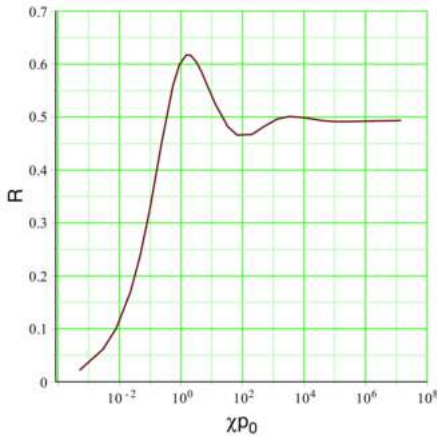
♦ remarque : on peut simplifier en prenant  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$  comme unité de longueur.

• Il n'y a pas de solution d'expression simple ; l'intégration numérique donne des solutions dont la forme décrit la transition depuis celle obtenue avec une faible masse volumique uniforme (ci-après à gauche ; l'effet de la pression y est très limité) jusqu'à celle obtenue pour la limite ultra-relativiste (ci-après à droite ; la pression diverge au centre, mais ici s'annule en surface de l'astre).



• Pour les “petits” astres (faible pression au centre) on retrouve, assez logiquement que le rayon  $R$  (valeur de  $r$  pour laquelle la pression s'annule) augmente en fonction de la pression centrale  $p_0$  (et réciproquement).

Par contre, pour les astres dont la pression centrale est plus grande, le rayon  $R$  n'augmente plus (et diminue même un peu transitoirement). Cette propriété, qui peut surprendre, vient du fait que l'augmentation de pression cause une augmentation du “champ de gravitation”, ce qui modifie la métrique.



◊ remarque : on constate ainsi que  $R$  reste inférieur à  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ , mais puisque ici la masse volumique n'est pas uniforme, cette valeur ne correspond pas à la limite des trous noirs :  $r_s = R$ , avec en surface  $r_s = a(R)$ .

• L'évolution montre de même une limite  $\frac{r_s}{R} \approx 0,55 < 1$ , donc la limite  $r_s = R$  correspondant à la formation des trous noirs n'est jamais atteinte.

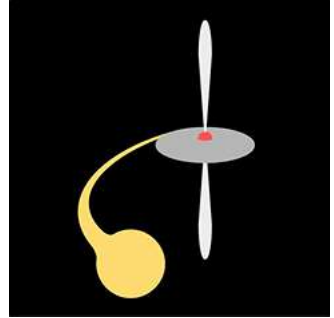
Même si la modélisation utilisée ici est un peu simpliste, elle donne une bonne idée qualitative du comportement des astres (une modélisation polytropique plus élaborée aboutit pratiquement aux mêmes conclusions). Ceci indique que l'effet prépondérant n'est pas le détail de l'équation d'état, mais l'approche de la limite ultra-relativiste : les astres deviennent instables car le champ augmente la pression, qui augmente le champ... ce qui provoque une divergence.

• Une question se pose alors inmanquablement : si les astres en équilibre restent en deçà de la limite précédente, que se produit-il si, à l'occasion des mouvements cosmiques, une accumulation dynamique de matière dépasse à un instant donné cette limite ?

La pression infinie suggère l'apparition d'une onde de choc, aussi violente que celles des supernova, mais tout dépend en fait de la façon dont la limite est dépassée.


- Dans certains cas, la limite peut être dépassée “en douceur” : la matière provenant d'une étoile compagnon binaire tombe progressivement en spirale de plus en plus resserrée et forme un disque d'accrétion.

Cette matière atteint le sol à une vitesse proche de celle de la lumière ; si elle ne peut s'accumuler car l'astre devient instable, alors sous l'effet de l'onde de choc elle peut être violemment éjectée selon l'axe polaire.



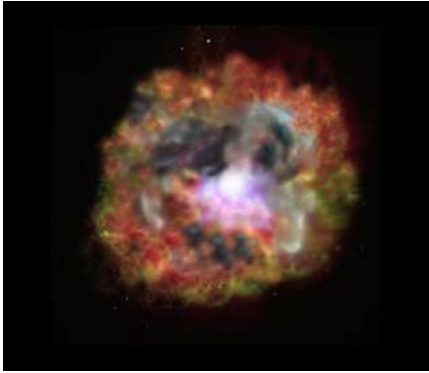
Une partie de l'énergie de la matière incidente est dissipée par des frottements lors du choc en surface, mais cela tend à élever la température de l'astre, donc aussi sa masse volumique (relativiste), ce qui diminue la taille limite. Ainsi de la matière est éjectée en quantité au moins égale, voire supérieure, à la quantité incidente : la taille de l'astre tend plutôt à diminuer, non par compactage, mais par éjection de matière. L'astre (pulsar ou quasar) reste toujours en deçà de la limite qui formerait un trou-noir.

- Dans ces conditions, que penser des “candidats” trous noirs observés indirectement par leur interaction avec une étoile compagnon ? Il pourrait s'agir de naines sombres : étoiles à neutrons en fin de vie, dont la masse est très proche de la limite de stabilité et dont le comportement, observé à distance, est quasi identique à celui d'un trou noir : pour que la lumière passant au voisinage se comporte ainsi, il suffit que  $r_s < R < \sqrt{\frac{27}{4}} r_s \approx 2,6 r_s$ .

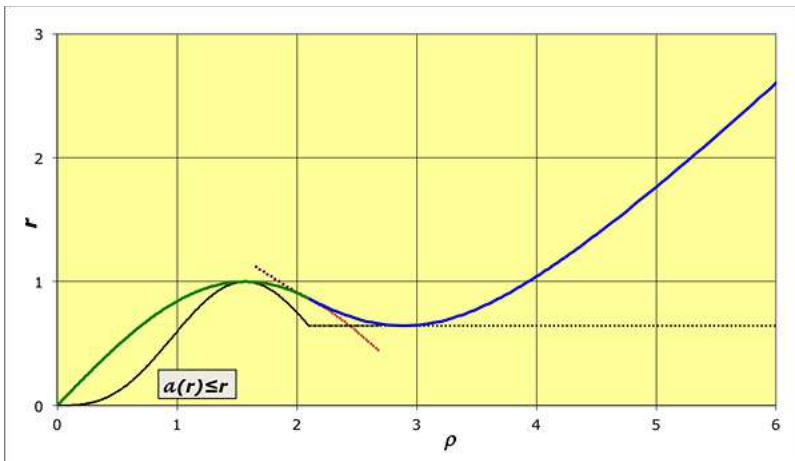
 *exercices n° V, VI et VII.*

## 5. Cas avec “inversion”

- La situation pourrait être différente si deux astres, déjà proches de la limite, entrent en collision. La violence du choc dépend de sa géométrie : choc frontal ou approche progressive en spirale, mais conduit probablement toujours à une supernova. Une partie restreinte de la matière reste groupée et forme un nouvel astre ; le reste est éjecté selon une géométrie (sphérique ou axiale) qui dépend de celle du choc.



- S'il est clair que la violence du choc est suffisante pour expliquer une explosion, un autre effet serait à considérer : pendant une durée relativement brève (c'est impossible statiquement), pourrait-il se former un amas de matière supérieur à la limite, créant une "bulle d'espace-temps" avec inversion du sens de variation de  $r(\rho)$  selon l'interprétation "isotrope" ?



♦ remarque : dans la mesure où cela ne modifierait pas l'allure qualitative, la représentation schématique ci-dessus ne tient pas compte de la correction ultra-relativiste au voisinage de l'origine.

◊ remarque : dans cette interprétation déduite des coordonnées “isotropes”, il serait envisageable que notre univers ne soit qu'une sorte de telle “bulle”, forcément en expansion ; le “grand attracteur” vers lequel semble converger la matière pourrait n'être que l'horizon séparant la bulle d'un univers “extérieur” beaucoup plus grand et bien plus ancien (rendant caduques plusieurs raisonnements classiques sur l'évolution de “nos” galaxies).

- Même s'il n'est pas évident de résoudre le système d'équations complet dans ces conditions avec “inversion”, des considérations générales permettent d'en suggérer les propriétés physiques à partir d'une solution partielle.

On peut alors étudier l'évolution d'une couche de surface éjectée (hypothétiquement formée dans un éventuel processus dynamique non précisé ici). La description simple de l'éjection est peu convaincante (et la prise en compte d'une relation entre  $\rho$  et  $\varepsilon$  n'améliore pas).

 *exercices n° VIII et IX.*