

CHAMP CENTRAL SYMÉTRIQUE INTÉRIEUR “AVEC PRESSION” - corrigé des exercices

I. Astre solide “simple”

1. • Pour une métrique de la forme : $ds^2 = A(r) c^2 dt^2 - C(r) dr^2 - D(r) d\Omega^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} g_{00} &= A ; \quad g_{11} = -C ; \quad g_{22} = -D ; \quad g_{33} = -D \sin^2(\theta) ; \\ g^{00} &= \frac{1}{A} ; \quad g^{11} = -\frac{1}{C} ; \quad g^{22} = -\frac{1}{D} ; \quad g^{33} = -\frac{1}{D \sin^2(\theta)} ; \\ \Gamma_{001} &= -\Gamma_{100} = \frac{A'}{2} ; \quad \Gamma_{111} = -\frac{C'}{2} ; \quad \Gamma_{221} = -\Gamma_{122} = -\frac{D'}{2} ; \\ \Gamma_{331} &= -\Gamma_{133} = -\frac{D'}{2} \sin^2(\theta) ; \quad \Gamma_{332} = -\Gamma_{233} = -D \sin(\theta) \cos(\theta) ; \\ \Gamma_{01}^0 &= \frac{A'}{2A} ; \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{A'}{2C} ; \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{C'}{2C} ; \\ \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{D'}{2D} ; \quad \Gamma_{12}^2 = -\frac{D'}{2C} ; \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{D'}{2C} \sin^2(\theta) ; \\ \Gamma_{32}^3 &= \cot(\theta) ; \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin(\theta) \cos(\theta) . \end{aligned}$$

- On en déduit : $R_{00} = \frac{A''}{2C} - \frac{A'}{2C} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} - \frac{D'}{D} \right)$;

$$R_{11} = -\frac{A''}{2A} - \frac{D''}{D} + \frac{A'}{2A} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} \right) + \frac{D'}{D} \left(\frac{C'}{2C} + \frac{D'}{2D} \right) ;$$

$$R_{22} = -\frac{D''}{2C} - \frac{D'}{2C} \left(\frac{A'}{2A} - \frac{C'}{2C} \right) + 1 ; \quad R_{33} = R_{22} \sin^2(\theta) .$$

- Par ailleurs : $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$; $u^0 = \frac{1}{\sqrt{A}}$ et $u^k = 0$;

$$T^{00} = \frac{\rho + \varepsilon}{A} - \frac{\rho}{A} = \frac{\varepsilon}{A} ; \quad T^{11} = \frac{\rho}{C} ; \quad T^{22} = \frac{\rho}{D} ; \quad T^{33} = \frac{\rho}{D \sin^2(\theta)} ;$$

$$T = g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = \varepsilon - 3\rho .$$

- Ceci correspond à : $T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T = A \frac{\varepsilon + 3\rho}{2}$; $T_{11} - \frac{1}{2}g_{11}T = C \frac{\varepsilon - \rho}{2}$;

$$T_{22} - \frac{1}{2}g_{22}T = D \frac{\varepsilon - \rho}{2} ; \quad T_{33} - \frac{1}{2}g_{33}T = D \sin^2(\theta) \frac{\varepsilon - \rho}{2} .$$

- Les équations du champ peuvent donc s'écrire, avec $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$:

$$R_0^0 = \frac{A''}{2AC} - \frac{A'}{2AC} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} - \frac{D'}{D} \right) = \chi \frac{\varepsilon + 3\rho}{2} ;$$

$$R_1^1 = \frac{A''}{2AC} + \frac{D''}{CD} - \frac{A'}{2AC} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} \right) - \frac{D'}{CD} \left(\frac{C'}{2C} + \frac{D'}{2D} \right) = -\chi \frac{\varepsilon - \rho}{2} ;$$

$$R_2^2 = R_3^3 = \frac{D''}{2CD} + \frac{D'}{2CD} \left(\frac{A'}{2A} - \frac{C'}{2C} \right) - \frac{1}{D} = -\chi \frac{\varepsilon - \rho}{2} .$$

2. • On obtient par combinaison :

$$R_0^0 - R_1^1 = -\frac{D''}{CD} + \frac{D'}{CD} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} + \frac{D'}{2D} \right) = \chi \cdot (\varepsilon + \rho) ;$$

$$R_2^2 + R_3^3 = \frac{D''}{CD} + \frac{D'}{CD} \left(\frac{A'}{2A} - \frac{C'}{2C} \right) - \frac{2}{D} = -\chi \cdot (\varepsilon - \rho) .$$

- La somme et la différence donnent ainsi respectivement :

$$\frac{D'}{2CD} \left(\frac{A'}{A} + \frac{D'}{2D} \right) - \frac{1}{D} = \chi \rho ; \quad -\frac{D''}{CD} + \frac{D'}{2CD} \left(\frac{C'}{C} + \frac{D'}{2D} \right) + \frac{1}{D} = \chi \varepsilon .$$

II. Statique des fluides

1. • En notant z la coordonnée verticale : $\vec{g} = -g \vec{u}_z$; la condition d'équilibre d'une tranche de fluide horizontale, de surface S et d'épaisseur dz donc de masse $dm = \mu S dz$, peut s'écrire :

$$dm \ddot{z} = 0 = -S \rho(z + dz) + S \rho(z) - g dm .$$

- On obtient ainsi : $\frac{d\rho}{dz} = -\mu g$; $\rho(z) = \rho(0) - \mu g z$.

- 2.a. • La loi de conservation du tenseur d'énergie-impulsion peut s'écrire : $D_\beta T^{\alpha\beta} = 0$, avec pour un fluide : $T^{\alpha\beta} = (\rho + \varepsilon_0) u^\alpha u^\beta - \rho g^{\alpha\beta}$.

- Ceci peut s'écrire : $\partial_\beta (\rho + \varepsilon_0) u^\alpha u^\beta + (\rho + \varepsilon_0) D_\beta (u^\alpha u^\beta) - \partial_\beta \rho g^{\alpha\beta} = 0$.

- Puisque la seule composante non nulle de u^β est u^0 , l'indépendance du cas statique par rapport au temps permet de simplifier : $(\rho + \varepsilon_0) D_\beta (u^\alpha u^\beta) - \partial_\beta \rho g^{\alpha\beta} = 0$.

- On peut utiliser :

$$\begin{aligned} D_\beta(u^\alpha u^\beta) &= \partial_\beta(u^\alpha u^\beta) + \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha u^\lambda u^\beta + \Gamma_{\lambda\beta}^\beta u^\alpha u^\lambda ; \\ D_\beta(u^\alpha u^\beta) &= \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha u^\lambda u^\beta + \frac{\partial_\lambda \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} u^\alpha u^\lambda = \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha u^\lambda u^\beta = \Gamma_{00}^\alpha u^0 u^0 ; \\ (\rho + \varepsilon_0) \Gamma_{\mu 00} u^0 u^0 - \partial_\mu \rho &= 0 ; \\ (\rho + \varepsilon_0) \frac{1}{2} \partial_\mu g_{00} u^0 u^0 + \partial_\mu \rho &= 0 . \end{aligned}$$

- Compte tenu de : $g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = g_{00} u^0 u^0 = 1$, on obtient (pour les composantes non nulles) :

$$\partial_i \rho = -(\rho + \varepsilon_0) \frac{\partial_i g_{00}}{2 g_{00}} = -(\rho + \varepsilon_0) \partial_i \ln(\sqrt{g_{00}}) .$$

2.b. • On obtient dans ce cas : $\rho' = -(\rho + \varepsilon_0) \frac{A'}{2 A}$.

III. Astre solide “simple” en coordonnées “classiques”

- La loi de la statique peut s'écrire : $\frac{A'}{A} = -\frac{2\rho'}{\varepsilon + \rho}$. L'intégration donne : $A \cdot (\varepsilon + \rho)^2 = Cste$.
 • On obtient en outre : $C(r) = \frac{1}{1-\lambda r^2}$; ainsi par continuité avec l'extérieur : $A(R) = \frac{1}{C(R)} = 1 - \lambda R^2$.
 • Avec $\rho(R) = 0$, ceci donne finalement : $A \cdot (\varepsilon + \rho)^2 = (1 - \lambda R^2) \varepsilon^2$.
- La loi de la statique peut s'écrire : $\frac{\rho}{\varepsilon} = \frac{\beta}{\alpha} - 1$.
 • L'équation du champ sur A peut s'écrire : $\frac{1-\lambda r^2}{r} \left(\frac{2\alpha'}{\alpha} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 3\lambda \frac{\rho}{\varepsilon}$.
 • En combinant on obtient : $\frac{1-\lambda r^2}{r} \frac{2\alpha'}{\alpha} = \lambda \left(\frac{3\beta}{\alpha} - 2 \right)$ où on peut substituer : $\frac{1-\lambda r^2}{r} = -\lambda \frac{x}{x'}$.
 • Ceci peut aussi s'écrire : $\alpha' x = x' \left(\alpha - \frac{3}{2}\beta \right)$; on en déduit $\alpha - \frac{3}{2}\beta = k x$ avec une constante $k = -\frac{1}{2}$ imposée par $\alpha(R) = x(R) = \beta$. Finalement en reportant : $A = \frac{1}{4} (3\sqrt{1-\lambda R^2} - \sqrt{1-\lambda r^2})^2$.
 • En reportant dans la loi de la statique : $\frac{\rho}{\varepsilon} = \frac{x-\beta}{3\beta-x}$ c'est à dire : $\rho = \frac{3\lambda}{x} \left(\frac{\sqrt{1-\lambda r^2} - \sqrt{1-\lambda R^2}}{3\sqrt{1-\lambda R^2} - \sqrt{1-\lambda r^2}} \right)$.

IV. Limite de stabilité d'un astre “simple”

- On peut obtenir par combinaison :

$$R_0^0 - 3R_1^1 = -\frac{A''}{AC} + \frac{A'}{AC} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} + \frac{1}{r} \right) + \frac{3C'}{C^2 r} = 2\chi\varepsilon .$$
 Ceci peut aussi s'écrire :

$$A'' - \frac{A'}{2} \left(\frac{A'}{A} + \frac{C'}{C} + \frac{2}{r} \right) = \frac{A}{rC} (3C' - 2rC^2\chi\varepsilon) .$$
- Avec $A = \alpha^2$ on obtient : $2\alpha'' - \alpha' \left(\frac{C'}{C} + \frac{2}{r} \right) = \frac{\alpha}{rC} (3C' - 2rC^2\chi\varepsilon)$.
 Par ailleurs $\frac{C'}{C} + \frac{2}{r} = 2 \frac{d}{dr} [\ln(r\sqrt{C})] = -2r\sqrt{C} \left(\frac{1}{r\sqrt{C}} \right)'$; on en déduit ainsi :

$$2r\sqrt{C} \left(\frac{\alpha'}{r\sqrt{C}} \right)' = \frac{\alpha}{rC} (3C' - 2rC^2\chi\varepsilon) ; \left(\frac{\alpha'}{r\sqrt{C}} \right)' = \frac{\alpha\sqrt{C}}{2} \frac{1}{r^2} \left(3 \frac{C'}{C^2} - 2r\chi\varepsilon \right) .$$

 • D'autre part : $\alpha' = \chi\varepsilon r^2$ et $\frac{C'}{C^2} = \frac{\alpha'}{r} - \frac{\alpha}{r^2}$; finalement :

$$\frac{1}{r^2} \left(3 \frac{C'}{C^2} - 2r\chi\varepsilon \right) = \frac{\alpha'}{r^3} - 3 \frac{\alpha}{r^4} = \left(\frac{\alpha}{r^3} \right)' ; \left(\frac{\alpha'}{r\sqrt{C}} \right)' = \frac{\alpha\sqrt{C}}{2} \left(\frac{\alpha}{r^3} \right)' .$$
- a. • Si on veut éviter une singularité, la fonction α ne peut pas s'annuler car $A = 0$ correspond à une divergence de $\ln(A)$ qui se comporte comme un potentiel de gravitation : un champ infini correspond forcément à une pression infinie d'après la loi de la statique.
 • La fonction α doit donc être positive car elle l'est au niveau du raccordement avec l'extérieur et qu'elle est continue.

- Si la masse volumique $\mu(r)$ est décroissante, la “masse volumique moyenne” $\frac{3M(r)}{4\pi r^3}$ l'est forcément aussi, donc $\left(\frac{\alpha}{r^3}\right)' \leq 0$ et $\left(\frac{\alpha'}{r\sqrt{C}}\right)' \leq 0$ (le cas avec masse volumique uniforme donne l'égalité).

- 3.b. • On obtient par intégration, compte tenu du raccordement pour $r = R$ (continu, à dérivée continue) :

$$\frac{\alpha'}{r\sqrt{C}} \geq \frac{\alpha'(R)}{R\sqrt{C(R)}} = \frac{r_s}{2R^3}.$$

$$\bullet \text{ Ainsi : } \alpha'(r) \geq \frac{r_s}{2R^3} r \sqrt{C} = \frac{r_s}{2R^3} \frac{r}{\sqrt{1-\frac{\alpha(r)}{r}}}.$$

- 3.c. • On en déduit par intégration, compte tenu du raccordement pour $r = R$:

$$\alpha(0) \leq \alpha(R) - \frac{r_s}{2R^3} \int_0^R \frac{r}{\sqrt{1-\frac{\alpha(r)}{r}}} dr \quad (\text{le cas avec masse volumique uniforme donne l'égalité}).$$

- On n'obtient ainsi $\alpha(0) > 0$ (permettant la stabilité : absence de divergence) que dans des conditions qui ne peuvent pas être plus étendues que pour une masse volumique uniforme : $R < \sqrt[3]{\frac{8}{9} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$.

V. Limite d'un astre “ultra-relativiste”

1. • Dans le cas ultra-relativiste, la substitution de $p = \frac{\varepsilon}{3}$ permet d'écrire l'équation sous la forme :

$$3\varepsilon'(r) = -2\varepsilon(r) \frac{3a(r)+\chi r^3\varepsilon(r)}{r.(r-a(r))} \quad \text{avec } a'(r) = \chi r^2 \varepsilon(r).$$

- On obtient ainsi : $3a''(r)r.(r-a(r)) = 2a'(r)[3r - 6a(r) - r a'(r)]$.

- 2.a. • L'équation est invariante d'échelle : χ se simplifie et aucun paramètre ne fixe une échelle particulière.

- La quantité a correspond à une longueur ; a' est sans unité et ne peut être qu'une constante ne dépendant que des coefficients numériques de l'équation : toute expression de r ne pourrait être en fait qu'une expression de $\frac{r}{r_0}$ avec une constante r_0 fixant une échelle.

- 2.b. • La forme indiquée peut être notée : $a'(r) = \beta$; on obtient ainsi : $0 = 2\beta[3r - 6\beta r - \beta r]$.

- Si on suppose $\beta \neq 0$ on obtient : $\beta = \frac{3}{7}r$ donc $a(r) = \frac{3}{7}r$.

VI. Approche de la limite d'un astre “ultra-relativiste”

1. • On peut éliminer la pression : $3p = \varepsilon - \varepsilon_R$; $3p' = \varepsilon' = -\frac{1}{6}(4\varepsilon - \varepsilon_R) \frac{3a+\chi r^3(\varepsilon-\varepsilon_R)}{r.(r-a)}$.

- Puis éliminer l'énergie volumique : $\varepsilon = \frac{a'}{\chi r^2}$; $\frac{a''}{\chi r^2} - \frac{2a'}{\chi r^3} = -\frac{1}{6\chi r^2}(4a' - \chi r^2 \varepsilon_R) \frac{3a+r a'-\chi r^2 \varepsilon_R}{r.(r-a)}$.

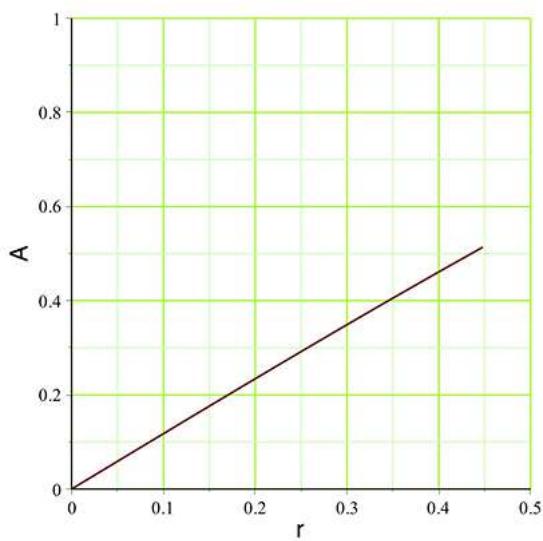
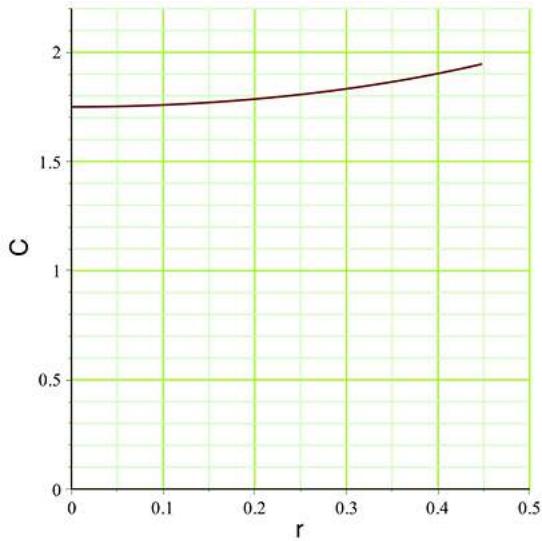
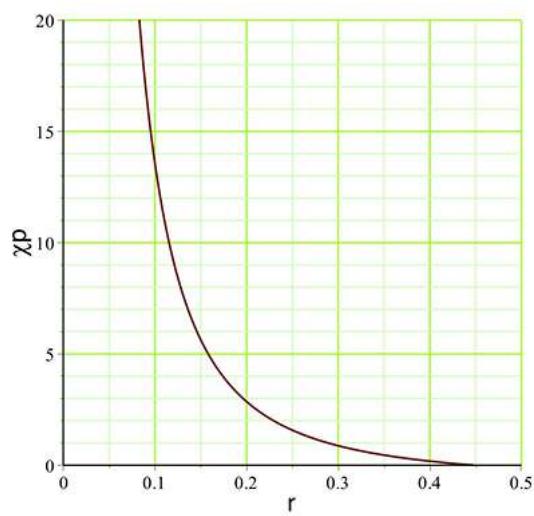
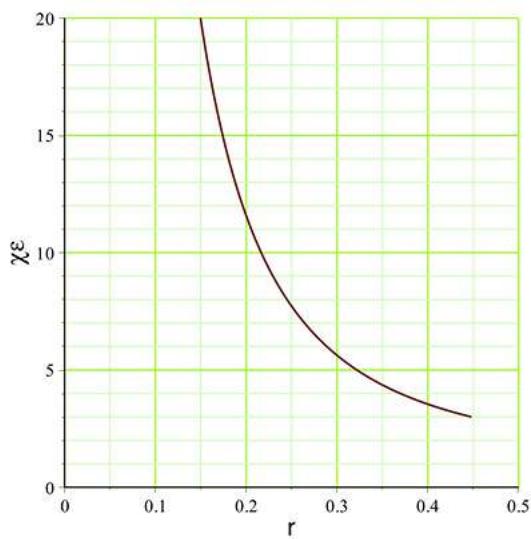
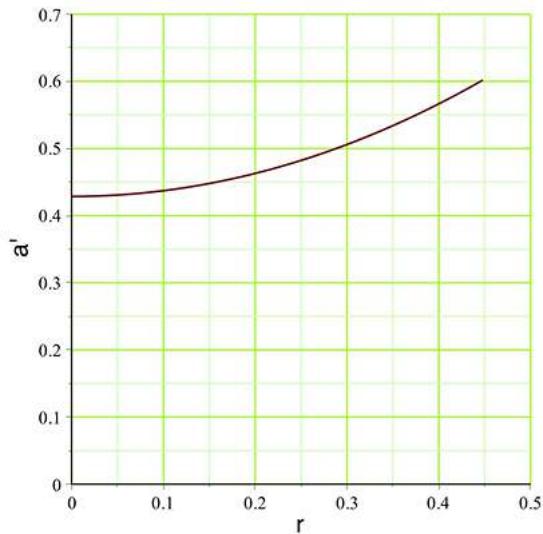
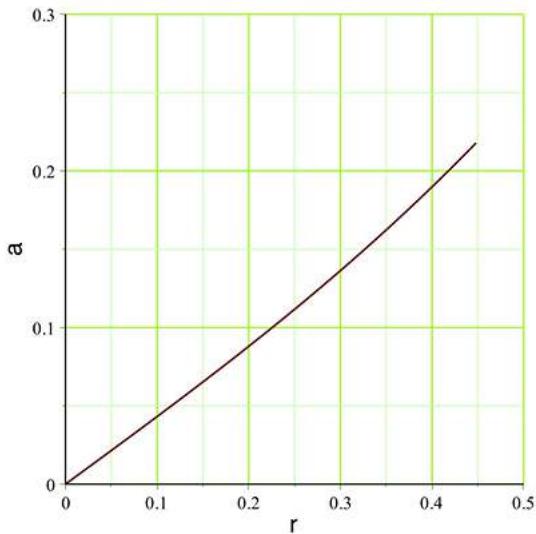
- Ceci peut s'écrire : $6[a''r - 2a'] = -(4a' - 3\lambda r^2) \frac{3a+r a'-3\lambda r^2}{r-a}$ ou encore :

$$6[a''(r)r - 2a'(r)](r-a(r)) = (4a'(r) - 3\lambda r^2)[3\lambda r^3 - 3a(r) - r a'(r)].$$

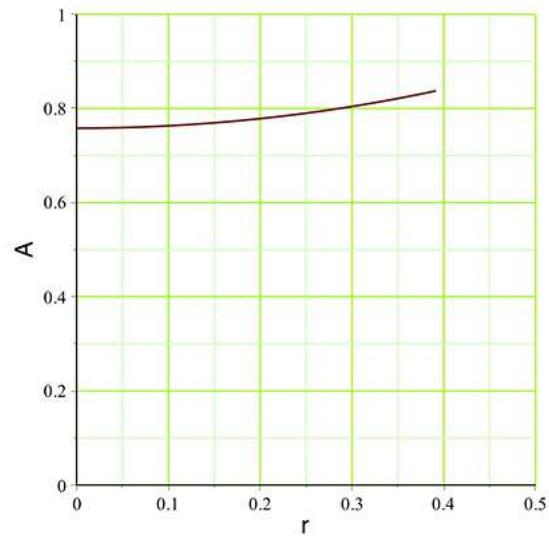
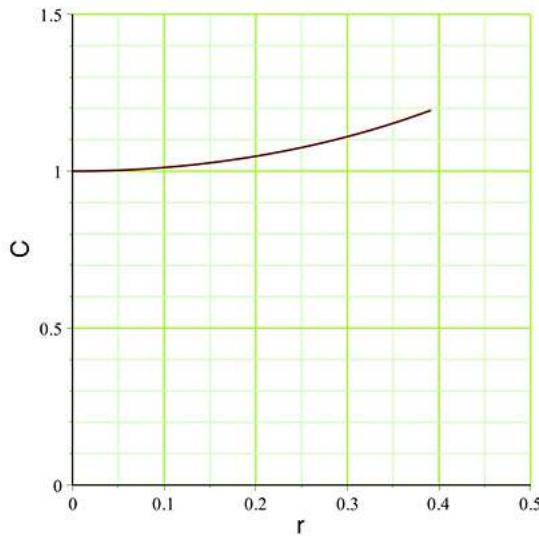
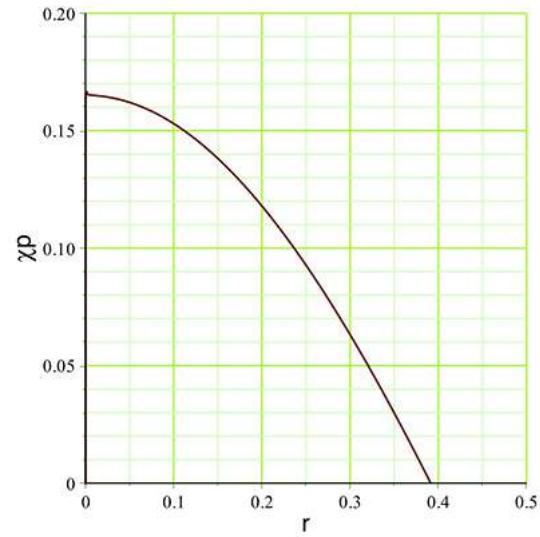
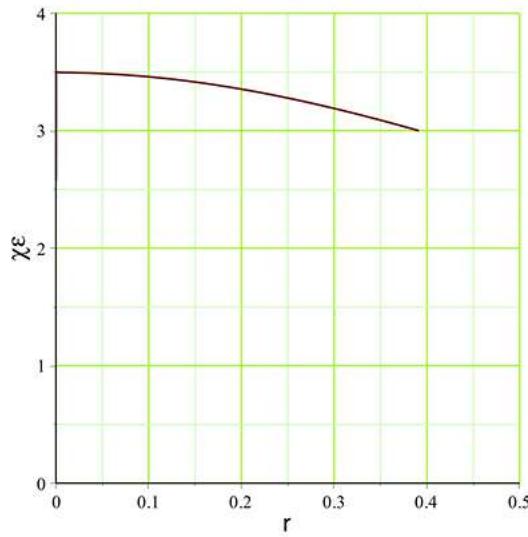
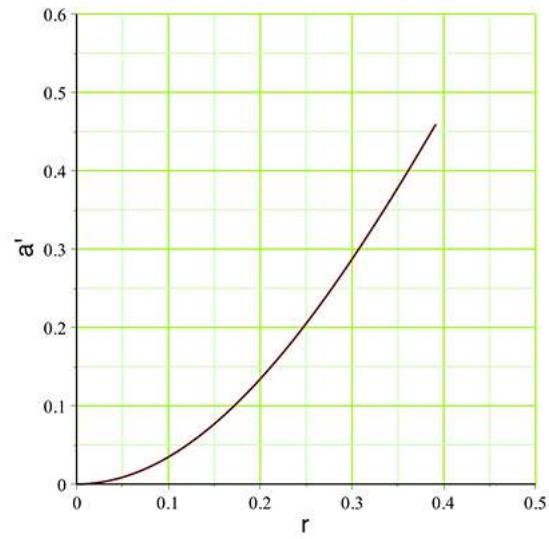
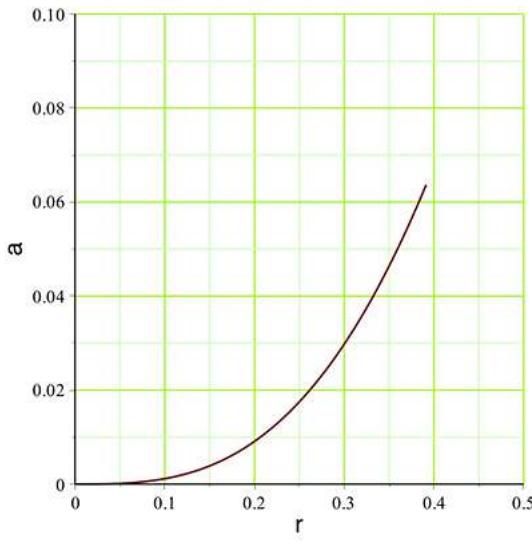
2. • Pour intégrer numériquement cette équation, on peut simplifier en prenant $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ comme unité de longueur ; c'est la valeur pour laquelle on obtiendrait $r = a(r)$ pour une énergie volumique uniforme ε_R .

Avec cette notation : $6[a''(r)r - 2a'(r)](r-a(r)) = (4a'(r) - 3r^2)[3r^3 - 3a(r) - r a'(r)]$.

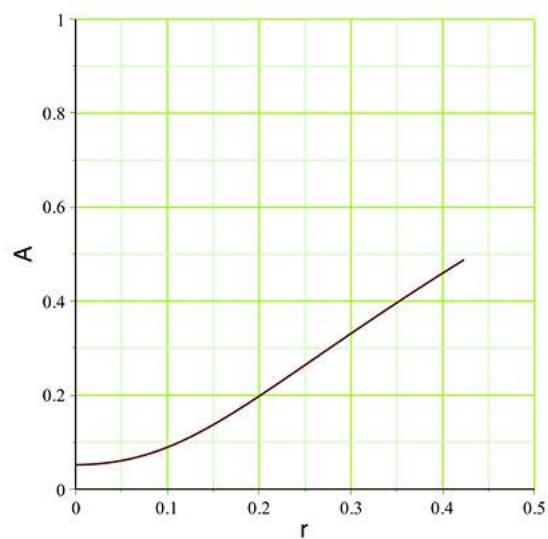
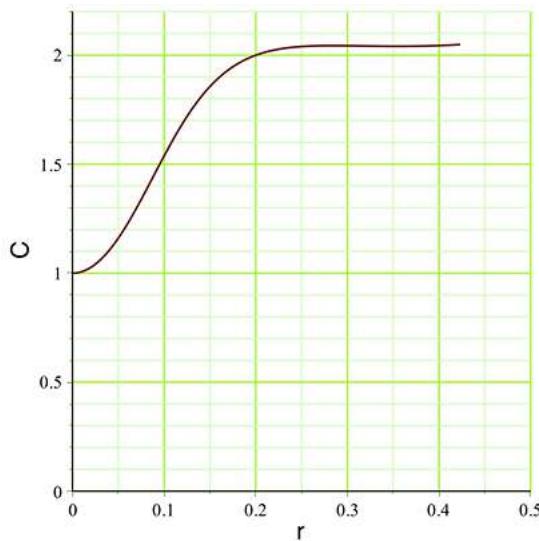
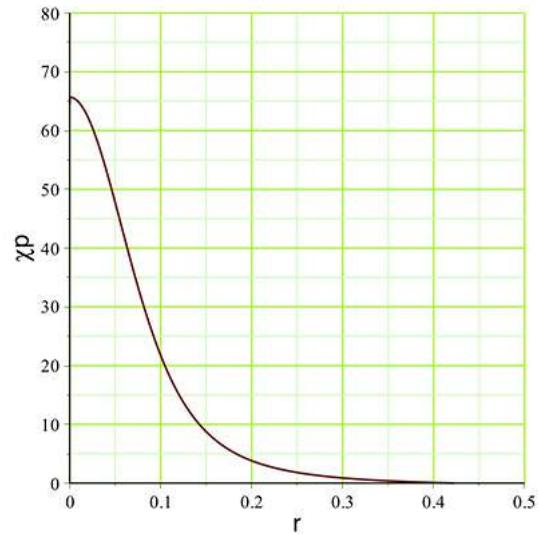
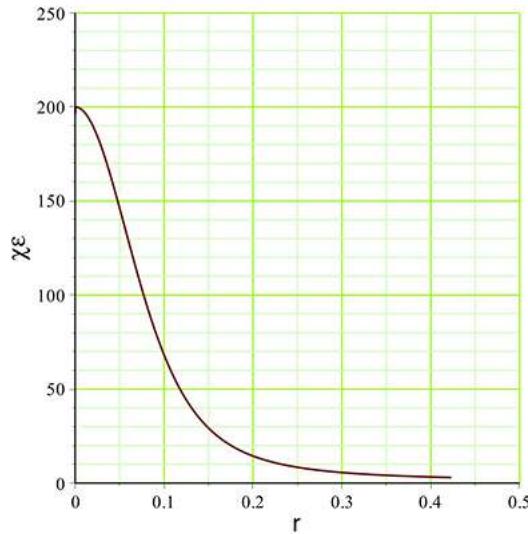
- On ne peut pas intégrer numériquement en partant de $r_0 = 0$ car l'équation possède une singularité à l'origine. On peut par contre intégrer (par exemple avec la méthode d'Euler) en partant des conditions $\{a(r_0) = \frac{3}{7}r_0 ; a'(r_0) = \frac{3}{7}\}$ pour $r_0 = 10^{-3}$ (unité relative). On obtient ainsi une solution dont le comportement au voisinage de l'origine est celui de la solution limite ultra-relativiste.



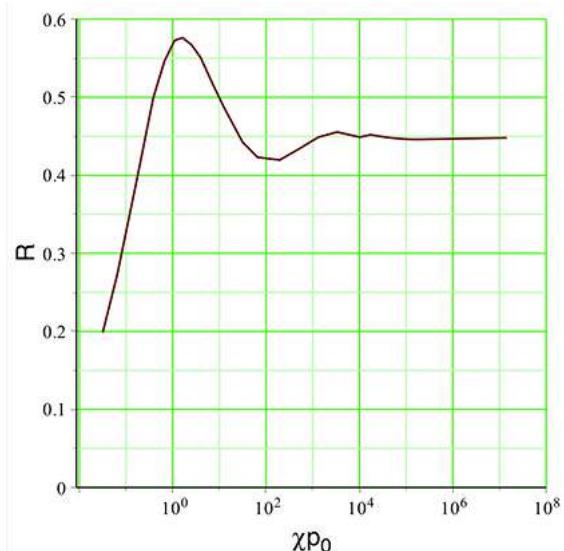
- À l'autre limite, on peut partir de $\{\alpha(r_0) = 1,2 \cdot 10^{-6} r_0 ; \alpha'(r_0) = 3,5 \cdot 10^{-6}\}$: on fixe $\alpha'(r_0)$ et on ajuste $\alpha(r_0)$ de façon à obtenir la limite $\alpha''(0) = 0$. On obtient ainsi une solution dont le comportement est qualitativement le même que pour la solution avec masse volumique uniforme : $\alpha(r) \approx \lambda r^3$.
- ◊ remarque : en pratique, à cause des incertitudes de calcul, il faut aussi surveiller $\chi p(0)$ et $C(0)$.



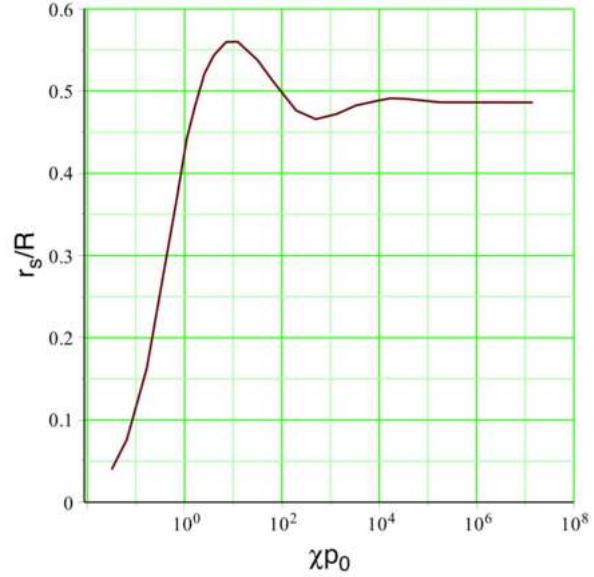
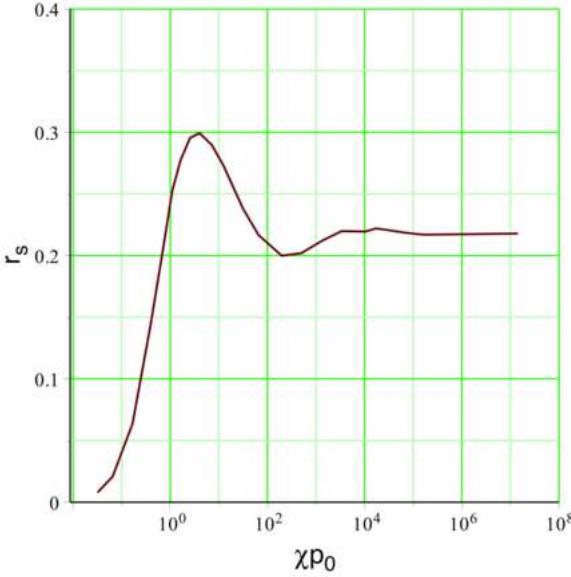
- Entre les deux, on peut partir des conditions $\{\alpha(r_0) = 6,7 \cdot 10^{-5} r_0 ; \alpha'(r_0) = 2,0 \cdot 10^{-4}\}$. On obtient ainsi une solution dont le comportement est qualitativement intermédiaire.



- 3.
- Pour les “petits” astres (faible pression au centre) on retrouve logiquement que le rayon R (valeur de r pour laquelle la pression s’annule) augmente en fonction de p_0 (et réciproquement).
 - Par contre, pour les astres dont la pression centrale est plus grande, le rayon R n’augmente plus (et diminue même un peu transitoirement). Cette propriété, qui peut surprendre, vient du fait que l’augmentation de pression cause une augmentation du “champ de gravitation”, ce qui modifie la métrique.
◊ remarque : on constate ainsi que R reste inférieur à $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, mais puisque ici la masse volumique n'est pas uniforme, cette valeur ne correspond pas à la limite des trous noirs : $r_s = R$.



- Il en est plus ou moins de même pour $r_s = \alpha(R)$, pour les mêmes raisons. La principale différence est au contraire pour les faibles rayons : $\alpha(R) \approx \lambda R^3$.



- L'évolution de $\frac{r_s}{R}$ montre de même une limite $\approx 0.5 < 1$; ceci signifie que la limite $r_s = R$ correspondant à la formation des trous noirs n'est jamais atteinte.
- ◊ remarque : si on impose des conditions initiales qui "dépassent" la solution correspondant à la limite ultra-relativiste, on obtient des solutions tendant en périphérie vers la même limite que la solution égale au centre à la limite ultra-relativiste ; ces solutions aboutissent donc à des valeurs comparables de R , r_s et p_0 ; par contre, ces solutions "oscillent" de façon "instable" au voisinage de l'origine (très sensibles aux incertitudes du calcul numérique ; cela est dû à la singularité de l'équation à l'origine) ; ceci suggère que l'équilibre correspondant est plutôt instable au voisinage du centre : ainsi les astres proches de la limite des trous noirs, ultra-relativistes dans leur partie centrale, seraient instables.
- ◊ remarque : on peut en outre noter que cette limite s'approche de $R = \frac{3}{2} r_s$ correspondant à la trajectoire circulaire (instable) pour les photons, donc aussi pour les ondes gravitationnelles ; au delà il serait possible que l'énergie de l'astre interagisse avec elle-même par émission/réabsorption d'ondes gravitationnelles ; on pourrait même se demander si les oscillations des courbes précédentes ne sont pas associées à des interférences, qui seraient éventuellement susceptibles de comporter des effets de quantification.

4.a. • On peut écrire : $T = 3 p \cdot \left(\left(\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_R}{3 p} \right)^2 + 1} \right) - 1 \right) = \frac{\varepsilon_R^2}{6 p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^3}\right) \rightarrow 0$.

4.b. • On obtient : $2 \varepsilon d\varepsilon = 18 p dp$; donc $\frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{9 p}{\sqrt{\varepsilon_R^2 + 9 p^2}} \rightarrow 0$ et $v_{son} = c \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}} \rightarrow \infty$.

4.c. • On peut écrire : $T = -\frac{\varepsilon_R^2}{\varepsilon_R + p} \rightarrow 0$ pour $p \rightarrow \infty$.

• On obtient : $\frac{d\varepsilon}{dp} = 3 - \frac{\varepsilon_R^2}{(\varepsilon_R + p)^2} \rightarrow 2$ et $v_{son} = c \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}} \rightarrow \frac{c}{\sqrt{2}}$ pour $p \rightarrow 0$.

◊ remarque : on aurait pu également proposer $\varepsilon(r) = 3 p + \varepsilon_R e^{-p/\varepsilon_R}$.

4.d. • On peut utiliser une relation de la forme : $\varepsilon(r) = 3 p + \frac{\varepsilon_R^2}{\varepsilon_R + \alpha p}$ avec α très petit, cela résout la difficulté théorique de la trace, pratiquement sans modifier les calculs numériques qui s'en déduisent.

4.e. • On peut éliminer de même la pression :

$$3p = \frac{1}{2} \left[(\varepsilon - 3\varepsilon_R) + \sqrt{\varepsilon^2 + 6\varepsilon\varepsilon_R - 3\varepsilon_R^2} \right] ;$$

$$3p' = \frac{1}{2} \varepsilon' \frac{\left[(\varepsilon - 3\varepsilon_R) + \sqrt{\varepsilon^2 + 6\varepsilon\varepsilon_R - 3\varepsilon_R^2} \right]}{\sqrt{\varepsilon^2 + 6\varepsilon\varepsilon_R - 3\varepsilon_R^2}} = \dots$$

$$\frac{1}{24} \left[(7\varepsilon - 3\varepsilon_R) + \sqrt{\varepsilon^2 + 6\varepsilon\varepsilon_R - 3\varepsilon_R^2} \right] \frac{6a + \chi r^3 \cdot \left[(\varepsilon - 3\varepsilon_R) + \sqrt{\varepsilon^2 + 6\varepsilon\varepsilon_R - 3\varepsilon_R^2} \right]}{r(r-a)} .$$

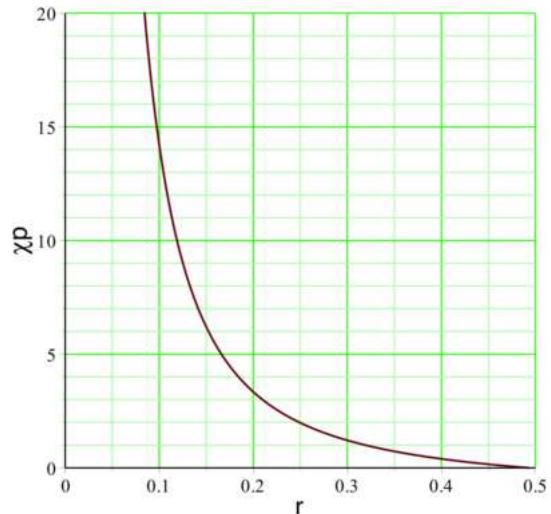
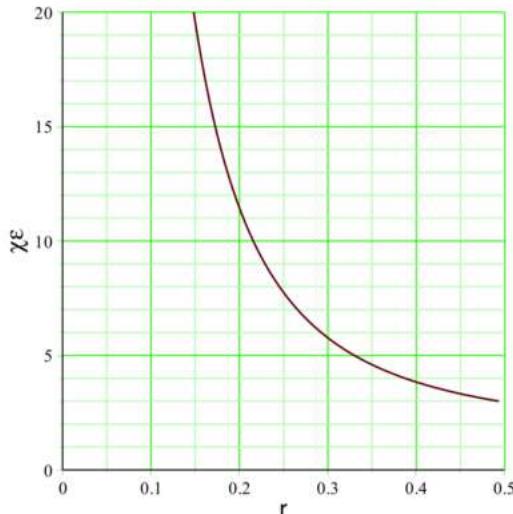
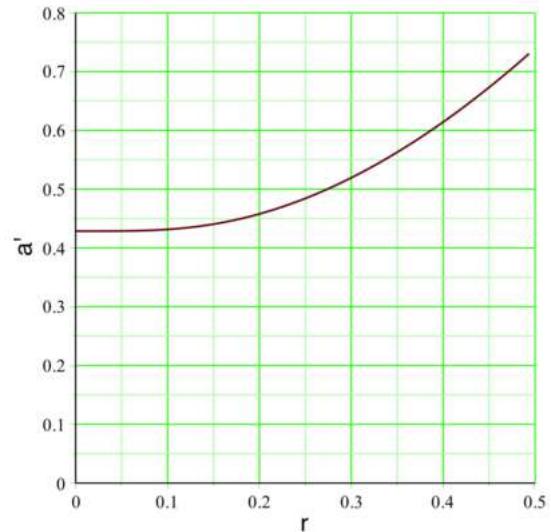
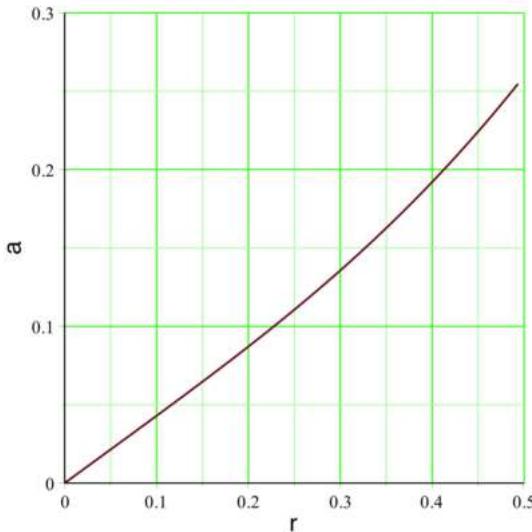
• En éliminant de même l'énergie volumique : $\varepsilon = \frac{a'}{\chi r^2}$; les calculs sont plus longs, mais on obtient :

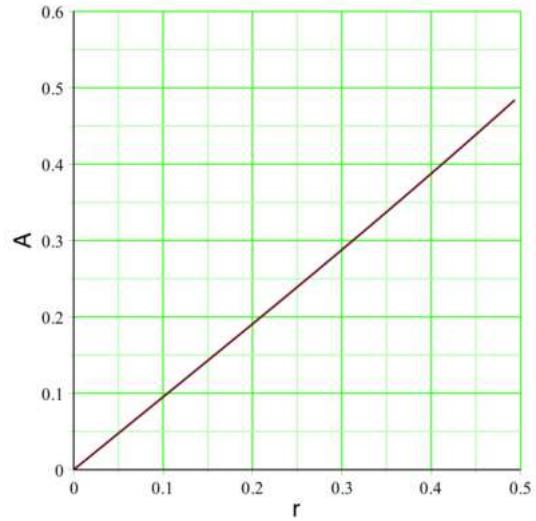
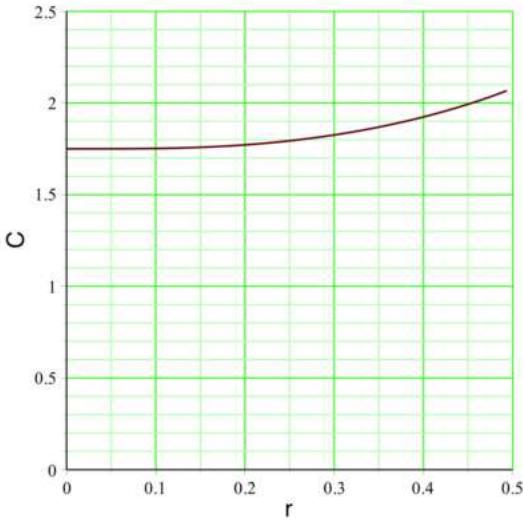
$$(a''r - 2a') \frac{\left[(a' + 9\lambda r^2) + \sqrt{a'^2 + 18a'\lambda r^2 - 27\lambda^2 r^4} \right]}{\sqrt{a'^2 + 18a'\lambda r^2 - 27\lambda^2 r^4}} = \dots$$

$$-\frac{1}{12} \left[(7a' - 9\lambda r^2) + \sqrt{a'^2 + 18a'\lambda r^2 - 27\lambda^2 r^4} \right] \frac{6a + r \cdot \left[(a' - 9\lambda r^2) + \sqrt{a'^2 + 18a'\lambda r^2 - 27\lambda^2 r^4} \right]}{r-a} .$$

◊ remarque : la réécriture sans dénominateur est possible mais encombrante et peu utile.

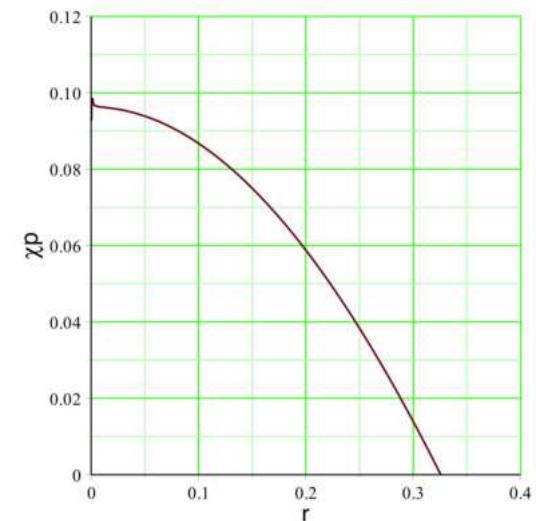
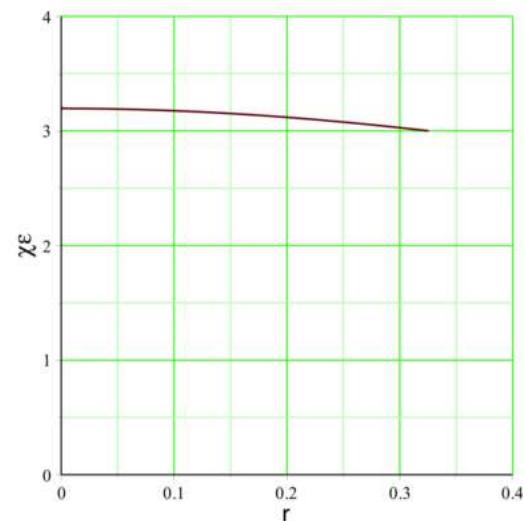
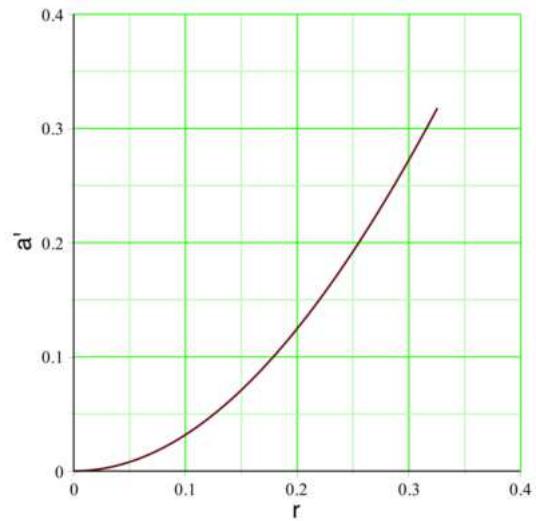
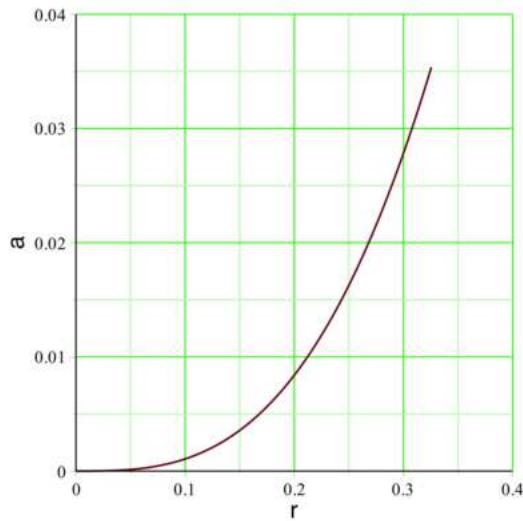
5. • On peut simplifier en prenant $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ comme unité de longueur, puis intégrer en partant des conditions $\{a(r_0) = \frac{3}{7}r_0 ; a'(r_0) = \frac{3}{7}\}$ pour $r_0 = 10^{-3}$ (unité relative). On obtient ainsi une solution dont le comportement au voisinage de l'origine est celui de la solution limite ultra-relativiste.

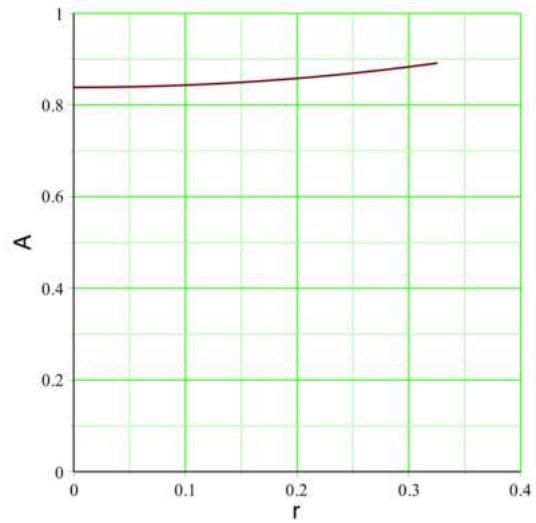
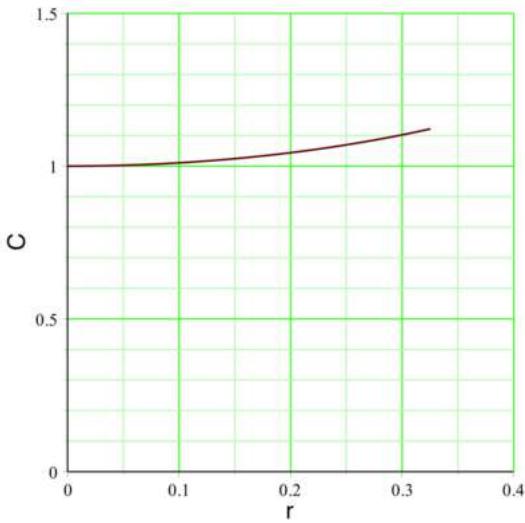




◊ remarque : la transition entre le centre ultra-relativiste et la périphérie n'est que très légèrement différente de celle obtenue pour la modélisation "simple" précédente.

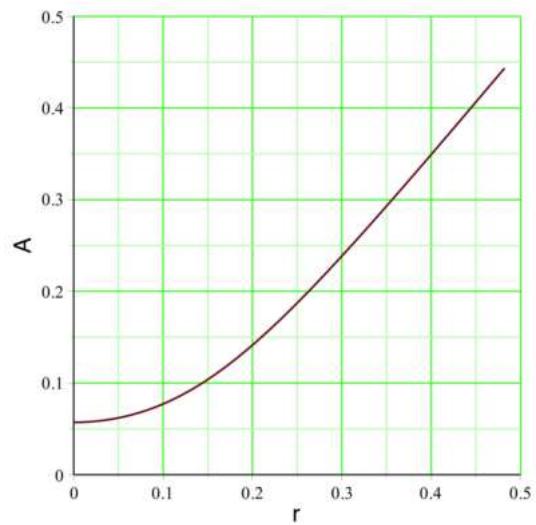
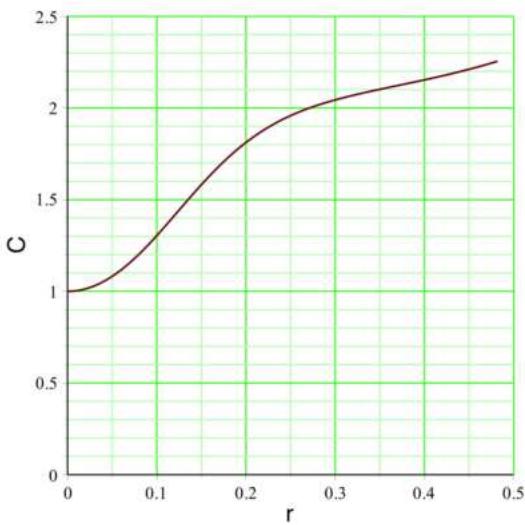
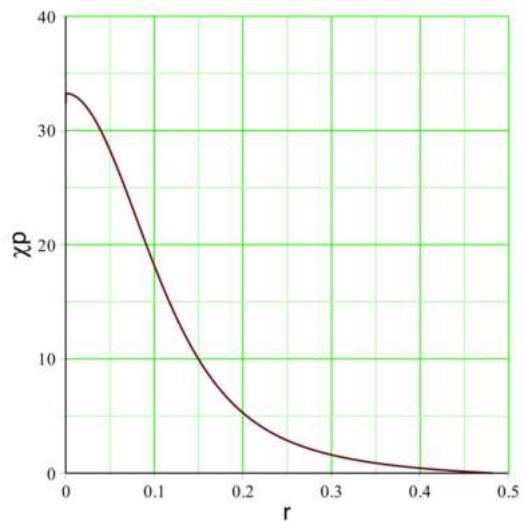
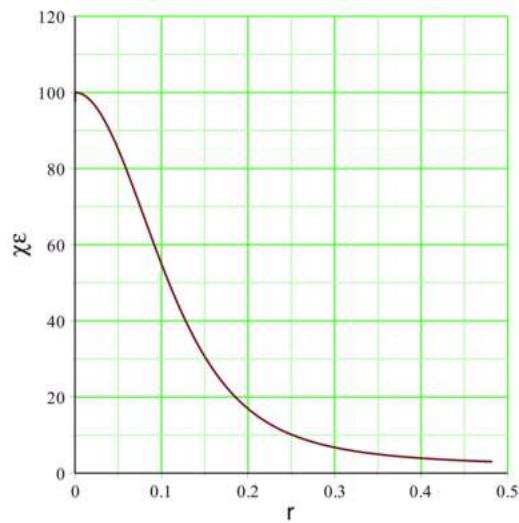
- À l'autre limite, on peut partir de $\{\alpha(r_0) = 1,07 \cdot 10^{-6} r_0 ; \alpha'(r_0) = 3,2 \cdot 10^{-6}\}$: on fixe $\alpha'(r_0)$ et on ajuste $\alpha(r_0)$ de façon à obtenir la limite $\alpha''(0) = 0$. On obtient ainsi une solution dont le comportement est qualitativement le même que pour la solution avec masse volumique uniforme : $\alpha(r) \approx \lambda r^3$.





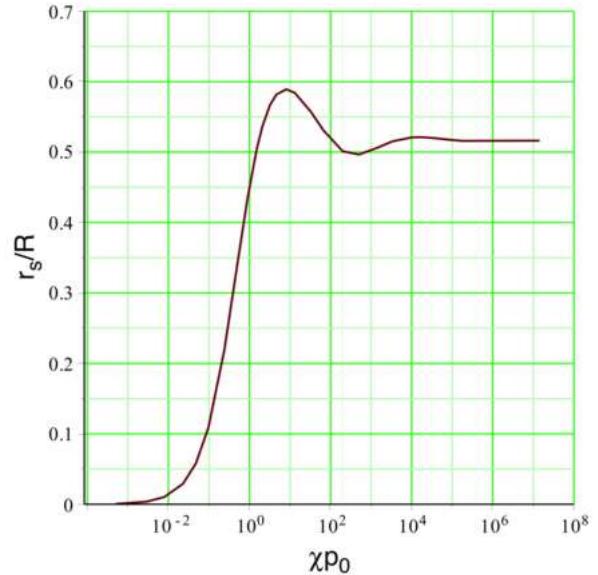
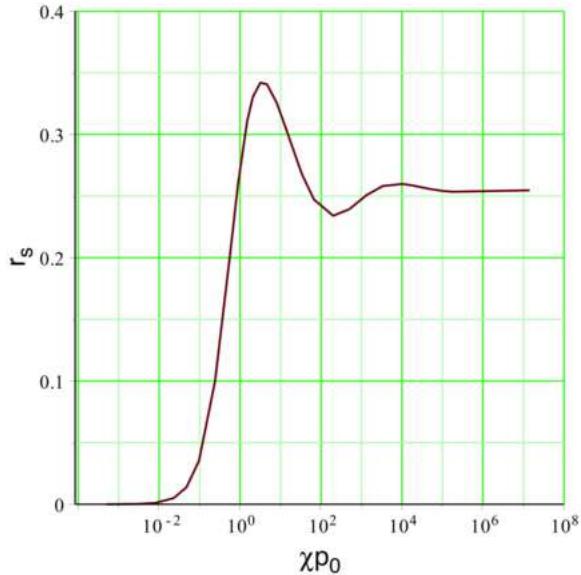
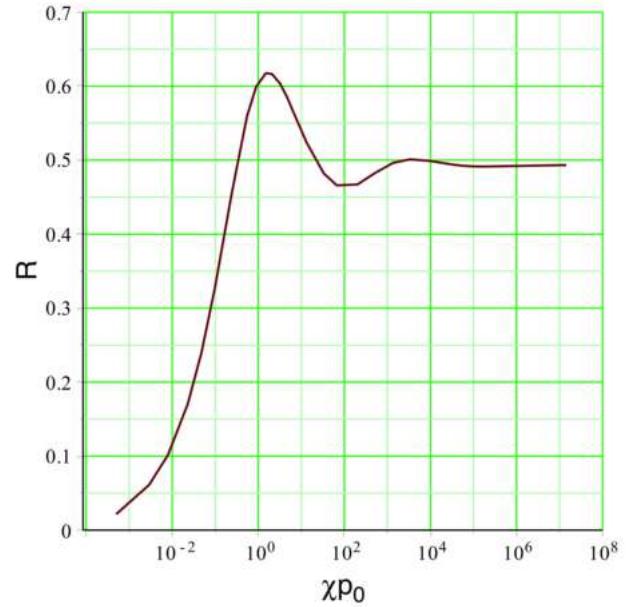
◊ remarque : pour $r \approx 0$ on voit ici des fluctuations de χp dues aux incertitudes de calcul ; pour R petit le rôle de χp est peu important et on peut extrapoler paraboliquement les valeurs pour r plus grand (la zone imprécise est très petite) ; une correction du second ordre serait négligeable.

- Entre les deux, on peut partir des conditions $\{\alpha(r_0) = 3,33 \cdot 10^{-5} r_0 ; \alpha'(r_0) = 1,0 \cdot 10^{-4}\}$. On obtient ainsi une solution dont le comportement est qualitativement intermédiaire.



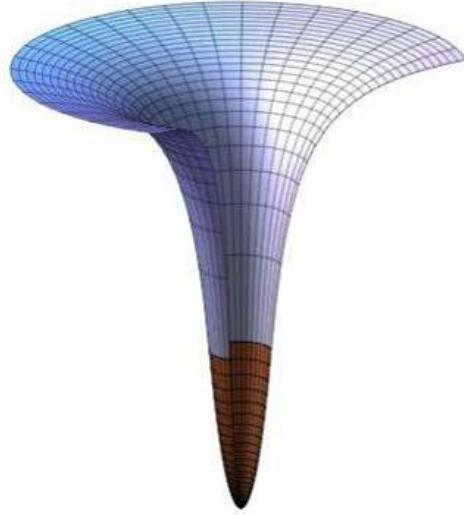
- L'évolution de R , r_s et $\frac{r_s}{R}$ en fonction de la pression centrale est tout à fait semblable à celle obtenue pour la modélisation "simple" précédente.

◊ remarque : cela est cohérent dans la mesure où l'utilisation d'une modélisation mathématique "simpliste" (sans justification physique) avait pour but de montrer que ce comportement est (seulement) caractéristique de l'approche de la limite ultra-relativiste.

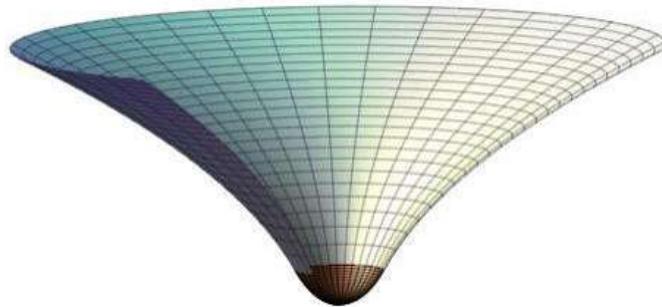


VII. Géométrie spatiale

- En notant $\varepsilon = \mu c^2$ et $\lambda = \frac{\chi \varepsilon}{3}$ on peut utiliser $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ comme unité de longueur pour simplifier les notations. On utilise le "rayon périphérique" r comme paramètre ; on note $r = R$ le rayon de l'astre.
- On obtient à l'intérieur (en notations réduites) : $A(r) = \frac{[A(R)]^{3/2}}{\sqrt{1-r^2}}$; $C(r) = \frac{1}{1-r^2}$; $\rho(r) = \arcsin(r)$; $\rho(R) = \arcsin(R)$.
- On obtient à l'extérieur : $A(r) = 1 - \frac{r_s}{r}$; $C(r) = \frac{1}{A(r)}$; $\rho(r) = r_s \operatorname{artanh} \left(\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \right) + r \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} + \rho_R$ avec $r_s = R^3$ et où ρ_R est une constante pour raccorder $\rho(R)$; en outre $A(R) = 1 - R^2$ pour raccorder $A(r)$.
- Pour un astre "non relativiste" $\rho(R) \ll \frac{\pi}{2}$; on peut choisir $r_s = 0,30$ ($R = 0,67$ et $\rho(R) = 0,72$) ; on obtient la représentation ci-après (l'intérieur est en marron).



2. • Avec les mêmes notations (réduites), on obtient à l'intérieur : $d\rho^2 = dr^2 + dz^2$; $C(r) = \frac{1}{1-r^2}$; $d\rho^2 = C dr^2$; $dz^2 = \frac{r^2 dr^2}{1-r^2}$; $z = 1 - \sqrt{1-r^2}$ (compte tenu de $z(0) = 0$; portion de sphère de centre 1 et de rayon 1).
- On obtient à l'extérieur : $A(r) = 1 - \frac{r_s}{r}$; $C(r) = \frac{1}{A(r)}$; $dz^2 = \frac{r_s dr^2}{r-r_s}$; $z = z_0 + 2 r_s \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1}$ où z_0 est une constante pour raccorder $z(R)$. Cela correspond à une portion de "paraboloïde" de révolution (selon un axe parallèle à sa directrice et non son axe de symétrie).
- Pour un astre "non relativiste" $\rho(R) \ll \frac{\pi}{2}$; on peut choisir $r_s = 0,30$ ($R = 0,67$ et $\rho(R) = 0,72$) ; on obtient la représentation ci-dessous (l'intérieur est en marron).



3. • Pour la partie intérieure, on peut éliminer la pression :

$$3 \rho = \frac{1}{2} \left[(\varepsilon - 3 \varepsilon_R) + \sqrt{\varepsilon^2 + 6 \varepsilon \varepsilon_R - 3 \varepsilon_R^2} \right] ;$$

$$3 \rho' = \frac{1}{2} \varepsilon' \frac{\left[(\varepsilon - 3 \varepsilon_R) + \sqrt{\varepsilon^2 + 6 \varepsilon \varepsilon_R - 3 \varepsilon_R^2} \right]}{\sqrt{\varepsilon^2 + 6 \varepsilon \varepsilon_R - 3 \varepsilon_R^2}} = \dots$$

$$\frac{1}{24} \left[(7 \varepsilon - 3 \varepsilon_R) + \sqrt{\varepsilon^2 + 6 \varepsilon \varepsilon_R - 3 \varepsilon_R^2} \right] \frac{6 a + \chi r^3 \cdot \left[(\varepsilon - 3 \varepsilon_R) + \sqrt{\varepsilon^2 + 6 \varepsilon \varepsilon_R - 3 \varepsilon_R^2} \right]}{r \cdot (r-a)} .$$

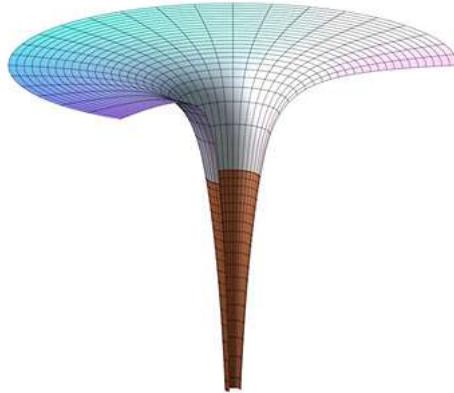
- Puis en éliminant l'énergie volumique : $\varepsilon = \frac{a'}{\chi r^2}$ on obtient :

$$(a'' r - 2 a') \frac{[(a' + 9\lambda r^2) + \sqrt{a'^2 + 18 a' \lambda r^2 - 27 \lambda^2 r^4}]}{\sqrt{a'^2 + 18 a' \lambda r^2 - 27 \lambda^2 r^4}} = \dots$$

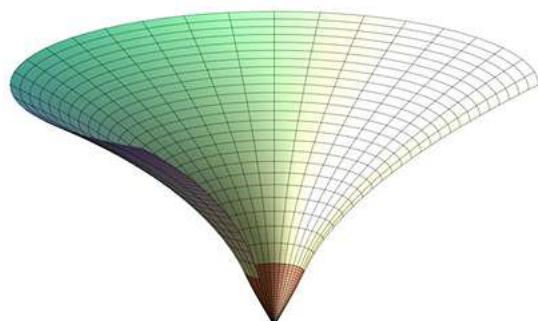
$$-\frac{1}{12} [(7 a' - 9 \lambda r^2) + \sqrt{a'^2 + 18 a' \lambda r^2 - 27 \lambda^2 r^4}] \frac{6 a + r \cdot [(a' - 9 \lambda r^2) + \sqrt{a'^2 + 18 a' \lambda r^2 - 27 \lambda^2 r^4}]}{r - a}.$$

◊ remarque : la réécriture sans dénominateur est possible mais encombrante et peu utile.

- On peut simplifier en prenant $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ comme unité de longueur, puis intégrer en partant des conditions $\{a(r_0) = \frac{3}{7} r_0 ; a'(r_0) = \frac{3}{7}\}$ pour $r_0 = 10^{-3}$ (unité relative). On obtient ainsi une solution dont le comportement au voisinage de l'origine est celui de la solution limite ultra-relativiste.
- Connaissant $a(r)$ on en déduit $C(r) = \frac{r}{r-a(r)}$ puis $\rho(r)$ par intégration.
- Avec $a'(r)$ on en déduit $\varepsilon(r)$ puis $\rho(r)$; ensuite on calcule $\frac{A'}{A} = \frac{a+\chi \rho r^3}{r(r-a)}$ puis $\ln(\sqrt{A})$ par intégration.
- La partie extérieure est inchangée et se raccorde de façon analogue ; on obtient la représentation suivante, avec une divergence du potentiel à l'origine ($A \rightarrow 0$).

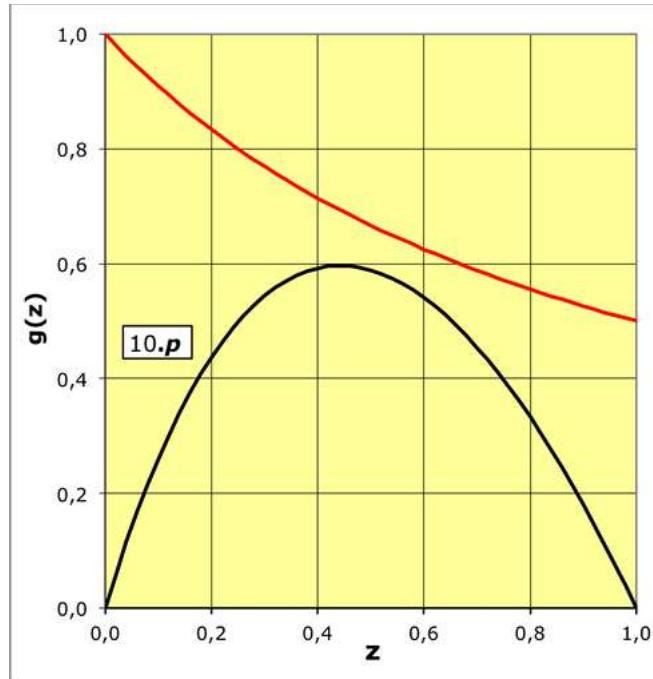


- 4.
- Avec les mêmes notations (réduites), on obtient à l'intérieur : $d\rho^2 = dr^2 + dz^2$; $C(r) = \frac{r}{r-a(r)}$; $d\rho^2 = C dr^2$; $dz^2 = \frac{a(r) dr^2}{r-a(r)}$; on en déduit $z(r)$ par intégration, compte tenu de $z(0) = 0$ (portion d'allure conique).
 - La partie extérieure est inchangée et se raccorde de façon analogue ; on obtient la représentation suivante. On peut remarquer à la périphérie de l'astre une courbure rappelant une portion de sphère, mais en se rapprochant du centre le comportement évolue vers une allure conique caractéristique de la limite ultra-relativiste.



VIII. Pression dans un système en pré-expansion

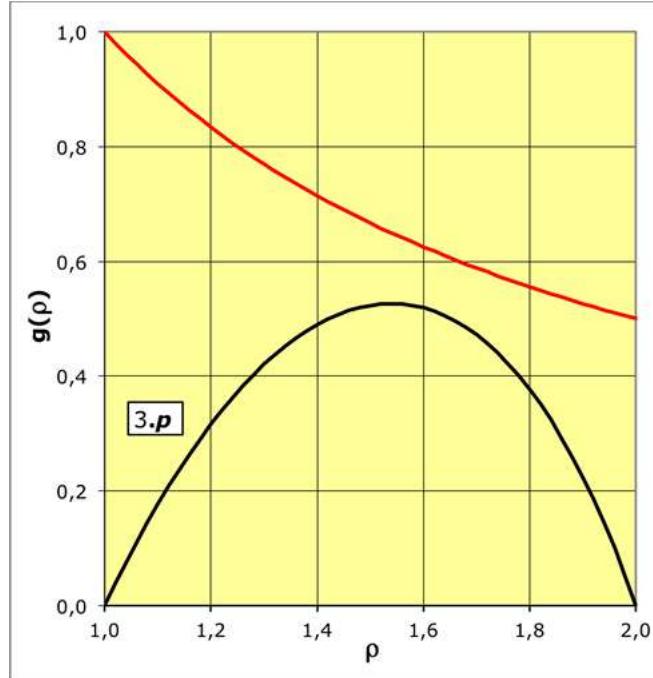
- 1.a. • Pour une tranche de fluide incompressible l'équation du mouvement peut s'écrire :
 $\mu S dz \ddot{z} = [\rho(z) - \rho(z + dz)] S + \mu S dz g .$
 • Ceci correspond à : $d\rho = \mu \cdot [g(z) - \ddot{z}] dz$ où \ddot{z} ne dépend pas de z .
 ♦ remarque : cela correspond à la loi de la statique du fluide dans son référentiel propre, non galiléen, donc avec une force d'inertie d'entraînement associée à l'accélération.
- 1.b. • Pour l'ensemble de la tranche : $\rho(0) = 0$ et $\rho(L) = 0$, donc : $\ddot{z} L = \int_0^L g(z') dz' = \alpha \ln\left(\frac{L+\eta}{\eta}\right)$. On obtient ainsi : $\ddot{z} = \frac{\alpha}{L} \ln\left(\frac{L+\eta}{\eta}\right)$.
- 1.c. • On en déduit : $\rho(z) = \mu \int_0^z g(z') dz' - \mu \ddot{z} \int_0^z dz' = \mu \alpha \ln\left(\frac{z+\eta}{\eta}\right) - \mu \frac{\alpha}{L} \ln\left(\frac{L+\eta}{\eta}\right) z$.



• C'est le champ plus fort vers $z = 0$ qui tend à entraîner le plus d'accélération, pour que l'ensemble du fluide incompressible accélère, forcément d'un même mouvement, il faut qu'une surpression apparaisse pour forcer l'accélération commune aux z intermédiaires. Par contre la masse à pousser est d'autant plus faible qu'on se rapproche de $z = L$ donc la surpression nécessaire diminue jusqu'à s'annuler.

- 2.a. • L'équation du mouvement peut s'écrire, initialement, selon la statique dans le référentiel non galiléen du fluide, où la force volumique inclut une force d'inertie d'entraînement : $\vec{\nabla}\rho = \frac{d\rho}{d\rho} \vec{u}_\rho = \mu \cdot (g - \ddot{\rho}) \vec{u}_\rho$.
- 2.b. • Ici $\ddot{\rho} = -\dot{r}$ dépend de r par conservation du volume : à chaque instant le débit $\mathcal{D}(t) = \pi r^2 \dot{\rho}(r, t)$ est indépendant de r .
 • Ceci peut s'écrire : $\dot{\rho}(r, t) = \frac{\mathcal{D}(t)}{\pi r^2(t)}$; $\ddot{\rho}(r, t) = \frac{\dot{\mathcal{D}}(t)}{\pi r^2(t)} - \frac{2\mathcal{D}(t)}{\pi r^3(t)} \dot{r}(r, t) = \frac{\dot{\mathcal{D}}(t)}{\pi r^2(t)} + \frac{2\mathcal{D}^2(t)}{\pi^2 r^5(t)}$. Cela décrit une accélération "de base" augmentée par un terme dû à la diminution de section.
 • Initialement $\mathcal{D} = 0$ donc : $\ddot{\rho}(r, 0) = \frac{\dot{\mathcal{D}}(0)}{\pi r^2} = \frac{\kappa}{r^2}$.
- 2.c. • Ceci donne : $d\rho = \mu \left(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\kappa}{(\rho-\eta)^2} \right) d\rho$.
 • Ainsi : $\rho(\rho) = \mu \int g d\rho - \mu \int \ddot{\rho} d\rho = \mu \alpha \ln(\rho) + \mu \frac{\kappa}{\rho-\eta} + Cte$.
 • Au début de la tranche : $\rho = \eta - (R + L)$ et $\rho = \mu \alpha \ln(\eta - (R + L)) - \mu \frac{\kappa}{R+L} + Cte = 0$.

- À la fin de la tranche : $\rho = \eta - R$ et $\varphi = \mu \alpha \ln(\eta - R) - \mu \frac{\kappa}{R} + Cte = 0$.
- Par différence : $\kappa \frac{L}{R.(R+L)} = \alpha \ln\left(\frac{\eta-R}{\eta-(R+L)}\right)$; $Cte = \mu \frac{\kappa}{R} - \mu \alpha \ln(\eta - R)$.
- Ainsi : $\varphi(\rho) = \mu \alpha \ln\left(\frac{\rho}{\eta-R}\right) + \mu \alpha \ln\left(\frac{\eta-R}{\eta-(R+L)}\right) \frac{R.(R+L)}{L} \frac{(\eta-\rho)-R}{(\eta-\rho).R}$.



- Pour un champ g correspondant, la surpression présente un maximum plus à droite (sur le graphique) que pour un écoulement à section constante : la masse à pousser doit être plus accélérée si on se rapproche de $\rho = \eta - R$ afin de permettre un débit uniforme dans une section plus petite.

IX. Astre avec une couche sphérique éjectée

- 1.a. • Pour une métrique de la forme : $ds^2 = A(r, t) c^2 dt^2 - C(r, t) dr^2 - r^2 d\Omega^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} g_{00} &= A & g_{11} &= -C & g_{22} &= -r^2 & g_{33} &= -r^2 \sin^2(\theta) \\ g^{00} &= \frac{1}{A} & g^{11} &= -\frac{1}{C} & g^{22} &= -\frac{1}{r^2} & g^{33} &= -\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \\ \Gamma_{000} &= \frac{\dot{A}}{2} & \Gamma_{001} &= -\Gamma_{100} = \frac{A'}{2} & \Gamma_{011} &= -\Gamma_{110} = \frac{\dot{C}}{2} & \Gamma_{111} &= -\frac{C'}{2} \\ \Gamma_{221} &= -\Gamma_{122} = -r & \Gamma_{331} &= -\Gamma_{133} = -r \sin^2(\theta) & \Gamma_{332} &= -\Gamma_{233} = -r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \Gamma^0_{00} &= \frac{\dot{A}}{2A} & \Gamma^0_{01} &= \frac{A'}{2A} & \Gamma^1_{00} &= \frac{A'}{2C} & \Gamma^0_{11} &= \frac{\dot{C}}{2A} & \Gamma^1_{10} &= \frac{\dot{C}}{2C} & \Gamma^1_{11} &= \frac{C'}{2C} \\ \Gamma^2_{21} &= \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} & \Gamma^1_{22} &= -\frac{r}{C} & \Gamma^1_{33} &= -\frac{r}{C} \sin^2(\theta) \\ \Gamma^3_{32} &= \cot(\theta) & \Gamma^2_{33} &= -\sin(\theta) \cos(\theta) \end{aligned}$$

- On en déduit : $R_{00} = \frac{A''}{2C} - \frac{A'}{2C} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} - \frac{2}{r} \right) - \frac{\ddot{C}}{2C} + \frac{\dot{C}}{2C} \left(\frac{\dot{A}}{2A} + \frac{\dot{C}}{2C} \right)$;
 $R_{01} = \frac{\dot{C}}{rC}$; $R_{11} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{2A} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} \right) + \frac{C'}{rC} + \frac{\ddot{C}}{2A} - \frac{\dot{C}}{2A} \left(\frac{\dot{A}}{2A} + \frac{\dot{C}}{2C} \right)$;
 $R_{22} = -\frac{1}{C} - \frac{r}{C} \left(\frac{A'}{2A} - \frac{C'}{2C} \right) + 1$; $R_{33} = R_{22} \sin^2(\theta)$.

- 1.b. • On obtient par ailleurs : $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$; $u^0 = \frac{\gamma}{\sqrt{A}}$; $u^1 = \frac{\gamma \beta}{\sqrt{C}}$ et $u^2 = u^3 = 0$;

$$\begin{aligned} T^{00} &= \gamma^2 \frac{\frac{p+\varepsilon_0}{A} - \frac{p}{A}}{A} = \gamma^2 \frac{\varepsilon_0}{A} + (\gamma^2 - 1) \frac{p}{A} & T^{01} &= \gamma^2 \beta \frac{\frac{p+\varepsilon_0}{\sqrt{AC}}}{\sqrt{AC}} \\ T^{11} &= \gamma^2 \beta^2 \frac{\frac{p+\varepsilon_0}{C} + \frac{p}{C}}{C} = \gamma^2 \beta^2 \frac{\varepsilon_0}{C} + \gamma^2 \frac{p}{C} & T^{22} &= \frac{p}{r^2} & T^{33} &= \frac{p}{r^2 \sin^2(\theta)} \\ T &= g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \varepsilon_0 - 3\varphi. \end{aligned}$$

◊ remarque : pour l'interprétation dans d'éventuelles régions où le sens de variation de r serait inversé, il faut être attentif au fait que dans ce cas $\beta < 0$ pour un point qui est repoussé vers l'extérieur.

- Ceci correspond à : $T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T = A \cdot \left[\left(\gamma^2 - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_0 + \left(\gamma^2 + \frac{1}{2} \right) \rho \right]$;
 $T_{01} = -\sqrt{AC} \gamma^2 \beta \cdot (\rho + \varepsilon_0)$; $T_{11} - \frac{1}{2}g_{11}T = C \cdot \left[\left(\gamma^2 \beta^2 + \frac{1}{2} \right) \varepsilon_0 + \left(\gamma^2 \beta^2 - \frac{1}{2} \right) \rho \right]$;
 $T_{22} - \frac{1}{2}g_{22}T = r^2 \frac{\varepsilon_0 - \rho}{2}$; $T_{33} - \frac{1}{2}g_{33}T = r^2 \sin^2(\theta) \frac{\varepsilon_0 - \rho}{2}$.

- 1.c.
- La loi de conservation du tenseur d'énergie-impulsion peut s'écrire : $D_\nu T^{\mu\nu} = 0$, avec pour un fluide : $T^{\mu\nu} = (\rho + \varepsilon_0) u^\mu u^\nu - \rho g^{\mu\nu}$.
 - Ceci peut s'écrire : $\partial_\nu (\rho + \varepsilon_0) u^\mu u^\nu + (\rho + \varepsilon_0) D_\nu (u^\mu u^\nu) - \partial_\nu \rho g^{\mu\nu} = 0$.
 - Pour $\mu = 0$ ou 1 (les autres termes sont nuls) :

$$\partial_\nu (\rho + \varepsilon_0) u^\mu u^\nu = \frac{\gamma}{\sqrt{A}} \overline{(\rho + \varepsilon_0)} u^\mu + \frac{\gamma \beta}{\sqrt{C}} (\rho + \varepsilon_0)' u^\mu.$$

• Par ailleurs :

$$\begin{aligned} D_\nu (u^\mu u^\nu) &= \partial_\nu (u^\mu u^\nu) + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} u^\lambda u^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\nu} u^\mu u^\lambda ; \\ \partial_\nu (u^0 u^\nu) &= \dot{\left(\frac{\gamma^2}{A}\right)} + \left(\frac{\gamma^2 \beta}{\sqrt{AC}}\right)' ; \quad \partial_\nu (u^1 u^\nu) = \dot{\left(\frac{\gamma^2 \beta}{\sqrt{AC}}\right)} + \left(\frac{\gamma^2 \beta^2}{C}\right)' ; \\ \Gamma^0_{\lambda\nu} u^\lambda u^\nu &= \frac{\dot{A}}{2A} \frac{\gamma^2}{A} + \frac{A'}{A} \frac{\gamma^2 \beta}{\sqrt{AC}} + \frac{\dot{C}}{2A} \frac{\gamma^2 \beta^2}{C} ; \\ \Gamma^1_{\lambda\nu} u^\lambda u^\nu &= \frac{A'}{2C} \frac{\gamma^2}{A} + \frac{\dot{C}}{C} \frac{\gamma^2 \beta}{\sqrt{AC}} + \frac{C'}{2C} \frac{\gamma^2 \beta^2}{C} ; \\ \Gamma^\nu_{\lambda\nu} u^\mu u^\lambda &= \frac{\partial_\lambda (\sqrt{|g|})}{\sqrt{|g|}} u^\mu u^\lambda \text{ (pour } \mu = 0 \text{ ou } 1 \text{).} \end{aligned}$$

• Enfin : $\partial_\nu \rho g^{0\nu} = \frac{\dot{\rho}}{A}$; $\partial_\nu \rho g^{1\nu} = -\frac{\dot{\rho}}{C}$.

• La combinaison de ces termes montre que la loi de la dynamique du fluide est loin d'être simple.

- 2.a.
- Les équations du champ obtenues avec les expressions précédentes sont compliquées ; on peut se limiter à étudier le cas particulier correspondant à un état initial (hypothétique) immobile, mais ne le restant pas : $\dot{A} = \dot{C} = 0$; $\beta = 0$; $\gamma = 1$; $\varepsilon_0 = \varepsilon$.
 - On en déduit : $R_{00} = \frac{A''}{2C} - \frac{A'}{2C} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} - \frac{2}{r} \right) - \frac{\ddot{C}}{2C}$;
 $R_{01} = 0$; $R_{11} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{2A} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} \right) + \frac{C'}{rC} + \frac{\ddot{C}}{2A}$;
 $R_{22} = -\frac{1}{C} - \frac{r}{C} \left(\frac{A'}{2A} - \frac{C'}{2C} \right) + 1$; $R_{33} = R_{22} \sin^2(\theta)$.

- Par ailleurs : $T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T = A \frac{\varepsilon + 3\rho}{2}$; $T_{01} = 0$; $T_{11} - \frac{1}{2}g_{11}T = C \frac{\varepsilon - \rho}{2}$;
 $T_{22} - \frac{1}{2}g_{22}T = r^2 \frac{\varepsilon - \rho}{2}$; $T_{33} - \frac{1}{2}g_{33}T = r^2 \sin^2(\theta) \frac{\varepsilon - \rho}{2}$.

• Les équations du champ peuvent donc s'écrire :

$$\begin{aligned} R_0^0 &= \frac{A''}{2AC} - \frac{A'}{2AC} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} - \frac{2}{r} \right) - \frac{\ddot{C}}{2AC} = \chi \frac{\varepsilon + 3\rho}{2} ; \\ R_1^1 &= \frac{A''}{2AC} - \frac{A'}{2AC} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} \right) - \frac{C'}{rC^2} - \frac{\ddot{C}}{2AC} = -\chi \frac{\varepsilon - \rho}{2} ; \\ R_2^2 &= R_3^3 = \frac{1}{Cr^2} + \frac{1}{Cr} \left(\frac{A'}{2A} - \frac{C'}{2C} \right) - \frac{1}{r^2} = -\chi \frac{\varepsilon - \rho}{2}. \end{aligned}$$

◊ remarque : le coefficient C est le seul intervenant par sa dérivée seconde temporelle \ddot{C} .

• On obtient par combinaison :

$$\begin{aligned} R_0^0 - R_1^1 &= \frac{2}{Cr} \left(\frac{A'}{2A} + \frac{C'}{2C} \right) = \chi \cdot (\varepsilon + \rho) ; \\ R_2^2 + R_3^3 &= \frac{2}{Cr^2} + \frac{2}{Cr} \left(\frac{A'}{2A} - \frac{C'}{2C} \right) - \frac{2}{r^2} = -\chi \cdot (\varepsilon - \rho). \end{aligned}$$

• La somme et la différence donnent ainsi respectivement :

$$\frac{1}{Cr} \left(\frac{A'}{A} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \chi \rho ; \quad \frac{1}{Cr} \left(\frac{C}{C} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = \chi \varepsilon.$$

- Ces équations semblent exactement les mêmes que pour le cas statique mais cela ne signifie pas que la métrique soit la même, car l'expression de ρ est ici différente. On peut s'en convaincre en considérant la combinaison $R_0^0 - 3R_1^1$ qui permettait de calculer la métrique indépendamment de ρ , puis d'en déduire ρ par la loi de la statique ; ici cette combinaison dépend de \ddot{C} , ce qui au contraire permet ensuite (quand on a déterminé la métrique initiale) d'en déduire l'évolution de C dont dépendent ensuite celles de A et de ρ .

◊ remarque : c'est la conservation de $T^{\mu\nu}$ qui montre la différence (loi remplaçant l'équilibre statique).

2.b. • Si on simplifie de même la loi de conservation de $T^{\mu\nu}$, l'équation fait intervenir des dérivées $\dot{\beta}$ et $\dot{\gamma}$ qui sont en fait des dérivées secondes, donc leurs valeurs initiales ne sont pas a priori forcément nulles. On peut toutefois considérer initialement : $\dot{\gamma} = \gamma^3 \beta \dot{\beta} = 0$; seul $\dot{\beta}$ intervient ici pour décrire l'accélération.

- On obtient ainsi (termes non nuls) :

$$D_\nu(u^1 u^\nu) = \partial_\nu(u^1 u^\nu) + \Gamma^1_{\lambda\nu} u^\lambda u^\nu ; \quad \partial_\nu(u^1 u^\nu) = \overbrace{\left(\frac{\gamma^2 \beta}{\sqrt{A C}}\right)}^{\dot{\beta}} = \frac{\dot{\beta}}{\sqrt{A C}} ; \quad \Gamma^1_{\lambda\nu} u^\lambda u^\nu = \frac{A'}{2 A C} ;$$

$$\partial_\nu p g^{1\nu} = -\frac{p'}{c}.$$

- La loi peut donc s'écrire : $(p + \varepsilon) \left(\frac{A'}{2 A} + \sqrt{\frac{C}{A}} \dot{\beta} \right) + p' = 0$, où on retrouve en plus du terme $\frac{A'}{2 A}$ (qui exprime l'effet gravitationnel), un terme décrivant l'accélération du système.

2.c. • Si on suppose le fluide incompressible, il faut écrire la conservation du volume en considérant la géométrie spatiale fixée : on raisonne à l'instant initial, fixé, pour comparer les déplacements en différents lieux.

- Pour un intervalle infinitésimal dt , le volume infinitésimal déplacé est : $dV = \pi r^2 d\rho = \pi r^2 \sqrt{C} dr$. L'incompressibilité peut donc s'écrire : $r^2 \sqrt{A} \beta = Cste$ (indépendante de r).
- Puisque les vitesses sont contraintes par cette relation, à la limite $t = 0$, les accélérations doivent la respecter aussi : $r^2 \sqrt{A} \dot{\beta} = \kappa = Cste$ (indépendante de r).

2.d. • On est ainsi conduit au système de trois équations (où κ se déduit des conditions aux limites) :

$$\frac{1}{c r} \left(\frac{C'}{C} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = \chi \varepsilon ; \quad \frac{1}{c r} \left(\frac{A'}{A} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \chi p ; \quad (\chi p + \varepsilon) \left(\frac{A'}{2 A} + \frac{\sqrt{C}}{A} \frac{\kappa}{r^2} \right) + p' = 0 .$$

- La résolution ne peut calculer que trois quantités ; dans le cas général il faut ajouter une relation entre ε et p . Malgré les défauts de cette modélisation simpliste, on peut aussi étudier le cas d'une masse volumique uniforme : on en déduit alors A , C et p (on s'intéresse ici au cas intérieur).

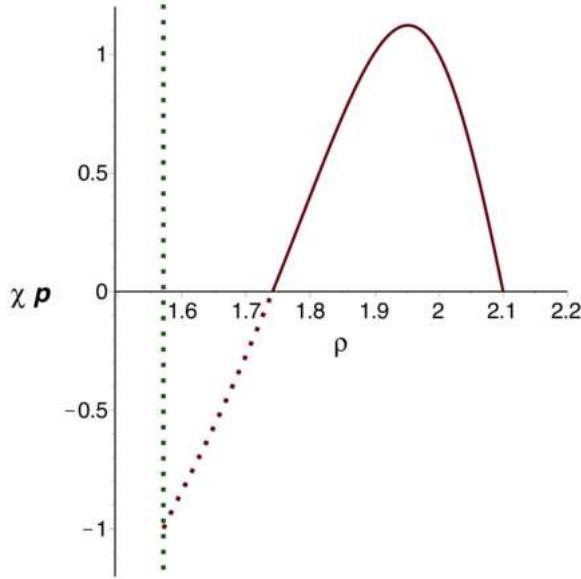
- La première équation conduit à : $\frac{r}{c} = r - \chi c^2 \int \mu r^2 dr + Cste$, où la constante d'intégration peut être incluse dans la borne inférieure de l'intégrale.

- On peut poser : $M(r) = \int_0^r \mu(r') 4\pi r'^2 dr'$ et $a(r) = \frac{\chi c^2}{4\pi} M(r) = \frac{2G}{c^2} M(r)$. La relation précédente peut alors s'écrire sous la forme : $C(r) = \frac{r}{r-a(r)}$, redonnant $C(0) = 1$ au centre, où le champ de gravitation est nul par symétrie.

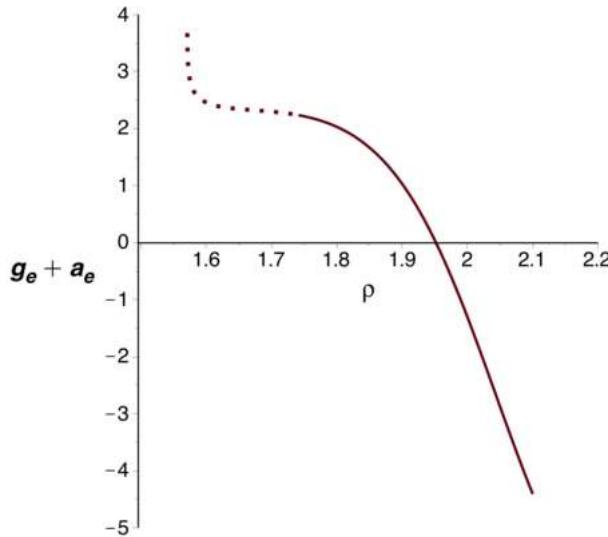
- Pour une masse volumique uniforme : $a(r) = \lambda r^3$ avec $\lambda = \frac{\chi \varepsilon}{3}$. On obtient ainsi : $C = \frac{1}{1-\lambda r^2}$ avec $r < \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. On peut alors choisir $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ comme unité pour simplifier les notations (ainsi $\rho(1) \approx 1,57$).

- La résolution du système des deux autres équations est possible numériquement, en ajustant κ pour obtenir $p(1) = 0$. Pour le cas d'un rayon R tel que $\rho(R) = 2,1$ ceci correspond à $R \approx 0,86 < 1$ dans la zone inversée où $r(\rho)$ décroît. Le raccordement avec l'expression extérieure pour $C(R) \approx 3,92$ impose pour ces notations : $r_s = R^3 \approx 0,64$.

- On constate alors que l'ajustement de κ est impossible : quel que soit κ la pression calculée "initialement" (avant le début de l'expansion) tend vers $\chi p = -1$ pour la limite intérieure $\rho(1) \approx 1,57$. On peut représenter l'exemple pour $\kappa = -1$ ($\dot{\beta} < 0$ pour un mouvement vers l'extérieur dans la zone inversée), la pression est raisonnablement non ultra-relativiste ($\chi p \ll \chi \varepsilon$), ce qui justifierait la modélisation simplifiée.



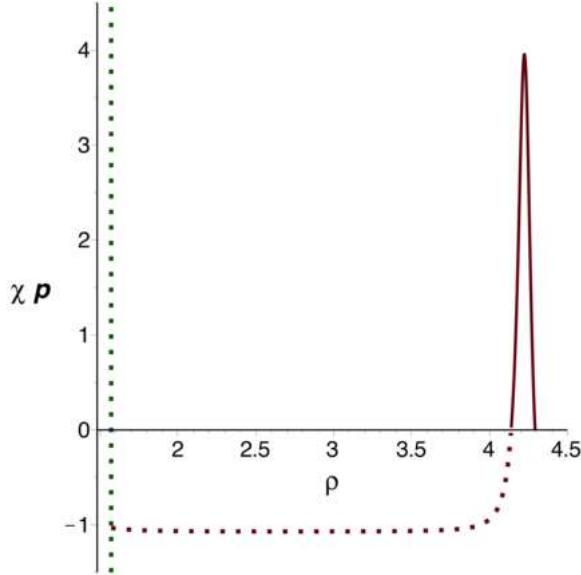
- De façon générale, le champ de “pesanteur” pousse plus la couche plus intérieure, causant une surpression dans l’épaisseur intermédiaire dont l’effet est de ralentir la précédente et d’augmenter l’accélération de la couche externe (limitée par l’inertie). Cet effet est renforcé dans la configuration géométrique étudiée ici : la diminution de r correspond à un “étranglement” dont il faut forcer la traversée.



- Mais un autre effet s’ajoute en relativité générale : la surpression cause une diminution du champ, tendant à diminuer la surpression, donc à moins diminuer le champ... La convergence de cette influence réciproque, non évidente, aboutit dans l’exemple étudié aux courbes représentées ci-avant. Le champ $\frac{1}{\sqrt{C}} \frac{A'}{2A} = \frac{r}{2} \frac{1+\chi p}{\sqrt{1-r^2}}$ montre effectivement une diminution (le terme inertiel qui s’y ajoute, nettement plus faible dans cette partie, n’y change rien qualitativement), mais celle-ci est insuffisante pour retenir la couche interne, ce qui y nécessiterait une pression encore plus faible, que l’intégration numérique calcule négative (donc non physique).

- Peut-on ainsi faire l’hypothèse que la couche sous-jacente soit accélérée sans compression ? Dans ce cas la relation déduite de l’uniformité du débit (par incompressibilité) devrait être remplacée par une diminution de l’énergie volumique ε en conséquence (le modèle simplifié avec masse volumique uniforme ne peut pas s’appliquer). Outre la complexité des calculs pour raccorder les deux cas, il y a un problème essentiel : la pression s’annule au delà de la limite de la zone où cela “devrait” causer l’expansion ; le modèle est inacceptable.

- On peut alors se demander si une modélisation ultra-relativiste donnerait des résultats plus plausibles en permettant des valeurs plus grandes de κ . Ceci est a priori très improbable, puisque l'essentiel des problèmes rencontrés vient des zones de faible pression, mais on peut vérifier qu'une étude analogue avec une équation d'état : $\varepsilon(r) = 3\rho + \varepsilon_R e^{-\rho/\varepsilon_R}$, en notant : $\lambda = \frac{\chi \varepsilon_R}{3} = 1$, aboutit pour $\kappa = -2,5$ à des résultats qualitativement équivalents.



- Il est clair que ces modélisations “simplistes” sont trop peu efficaces ; toutefois, sans l'exclure totalement, cela suggère que l'existence de “bulles d'espace” associées à une inversion de $r(\rho)$ est très improbable (selon ce modèle, la couche extérieure serait ainsi éjectée en supernova, faisant évoluer C dans le sens d'une “ouverture de la bulle”, jusqu'à sa disparition une fois l'excès de matière complètement éjecté).