CHAMP CENTRAL SYMÉTRIQUE INTÉRIEUR “AVEC PRESSION” - exercices

I. Astre solide “simple”

1. • On étudie un astre décrit par le tenseur énergie-impulsion : $T^{\alpha\beta} = (p + \varepsilon_0)\, u^\alpha\, u^\beta - p\, g^{\alpha\beta}$, où p et $\varepsilon_0 = \mu_0\, c^2$ désignent la pression et l'énergie volumique du solide, ici immobile.
• Écrire les équations du champ pour une métrique : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - D(r)\, d\Omega^2$.

2. • Montrer qu'on peut en déduire, entre autres :
$$\frac{D'}{2\,C\,D}\left(\frac{A'}{A} + \frac{D'}{2\,D}\right) - \frac{1}{D} = \chi\, p \quad ; \quad -\frac{D''}{C\,D} + \frac{D'}{2\,C\,D}\left(\frac{C'}{C} + \frac{D'}{2\,D}\right) + \frac{1}{D} = \chi\, \varepsilon\ .$$

II. Statique des fluides

1. • Établir la loi newtonienne de la statique des fluides incompressibles, soumis uniquement à la gravitation, dans un champ vertical uniforme. En déduire la pression en fonction de l'altitude z .

2. a) À partir de la loi de conservation du tenseur d'énergie-impulsion, établir et interpréter la loi de la statique des fluides soumis uniquement à la gravitation.
b) Préciser dans le cas d'une métrique de la forme : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - D(r)\, d\Omega^2$.

III. Astre solide “simple” en coordonnées “classiques”

• On étudie un astre décrit par le tenseur énergie-impulsion : $T^{\alpha\beta} = (p + \varepsilon_0)\, u^\alpha\, u^\beta - p\, g^{\alpha\beta}$, où p et $\varepsilon_0 = \mu_0\, c^2$ désignent la pression et l'énergie volumique du solide, ici immobile.
• Pour une métrique de la forme : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2$, les équations du champ s'écrivent sous la forme : $\frac{1}{C\,r}\left(\frac{A'}{A} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = \chi\, p$; $\frac{1}{C} - \frac{r\,C'}{C^2} = 1 - \chi\, \varepsilon\, r^2$.

1. • Pour un astre de masse volumique uniforme, montrer que la loi de la statique peut s'intégrer sous la forme : $A\,.(\varepsilon + p)^2 = (1 - \lambda\, R^2)\, \varepsilon^2$ où $\lambda = \frac{\chi\,\varepsilon}{3}$.

2. • En déduire l'expression de $A(r)$.
◊ remarque : on peut utiliser les notations $\alpha = \sqrt{A}$; $x = \sqrt{1 - \lambda\, r^2}$ et $\beta = \sqrt{1 - \lambda\, R^2}$.

3. • En déduire l'expression de $p(r)$.

IV. Limite de stabilité d'un astre “simple”

1. • On étudie un astre décrit par le tenseur énergie-impulsion : $T^{\alpha\beta} = (p + \varepsilon_0)\, u^\alpha\, u^\beta - p\, g^{\alpha\beta}$, où p et $\varepsilon_0 = \mu_0\, c^2$ désignent la pression et l'énergie volumique du solide, ici immobile.
• Pour une métrique de la forme : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2$, les équations du champ s'écrivent sous la forme :
$$R_0{}^0 = \frac{A''}{2\,A\,C} - \frac{A'}{2\,A\,C}\left(\frac{A'}{2\,A} + \frac{C'}{2\,C} - \frac{2}{r}\right) = \chi\, \frac{\varepsilon + 3\,p}{2}\ ;$$
$$R_1{}^1 = \frac{A''}{2\,A\,C} - \frac{A'}{2\,A\,C}\left(\frac{A'}{2\,A} + \frac{C'}{2\,C}\right) - \frac{C'}{C^2\,r} = -\chi\, \frac{\varepsilon - p}{2}\ ;$$
$$R_2{}^2 = R_3{}^3 = \frac{1}{C\,r^2} + \frac{1}{C\,r}\left(\frac{A'}{2\,A} - \frac{C'}{2\,C}\right) - \frac{1}{r^2} = -\chi\, \frac{\varepsilon - p}{2}\ .$$
• Montrer qu'on peut en déduire, entre autres :
$$A'' - \frac{A'}{2}\left(\frac{A'}{A} + \frac{C'}{C} + \frac{2}{r}\right) = \frac{A}{r\,C}\,(3\,C' - 2\,r\,C^2\,\chi\,\varepsilon)\ .$$

2. • En posant : $M(r) = \int_0^r \mu(r')\, 4\pi\, r'^2\, dr'$ et $a(r) = \frac{\chi\, c^2}{4\pi}\, M(r) = \frac{2\mathcal{G}}{c^2}\, M(r)$, la résolution des autres équations donne par ailleurs : $C(r) = \frac{r}{r-a(r)}$.

• Montrer qu'en notant $A = \alpha^2$ on obtient : $\left(\frac{\alpha'}{r\sqrt{C}}\right)' = \frac{\alpha\sqrt{C}}{2}\left(\frac{a}{r^3}\right)'$.

3. • On considère le cas plus général simplement supposé sans singularité de C $(a(r) < r)$ et tel que $\mu(r)$ soit une fonction décroissante (condition en pratique indispensable pour un fluide stable).

a) Montrer que les limites sur les solutions imposent $\left(\frac{\alpha'}{r\sqrt{C}}\right)' \leq 0$.

b) En déduire que $\alpha' \geq \frac{r_s}{2\,R^3}\, \frac{r}{\sqrt{1-\frac{a(r)}{r}}}$.

c) En déduire une limite supérieure pour $\alpha(0)$, puis une limite supérieure de R compatible avec la stabilité.

V. Limite d'un astre “ultra-relativiste”

1. • On étudie un astre décrit par le tenseur énergie-impulsion : $T^{\alpha\beta} = (\wp + \varepsilon_0)\, u^\alpha\, u^\beta - \wp\, g^{\alpha\beta}$, où $\wp$ et $\varepsilon_0 = \mu_0\, c^2$ désignent la pression et l'énergie volumique du solide, ici immobile.

• On raisonne avec une métrique de la forme : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2$.

• Dans ces conditions, les équations du champ et la loi d'équilibre statique permettent d'obtenir la relation : $\wp' = -\frac{\varepsilon+\wp}{2}\, \frac{a(r)+\chi\, r^3\, \wp}{r.(r-a(r))}$ avec $a(r) = \chi \int_0^r \varepsilon(r')\, r'^2\, dr'$.

• En déduire l'équation différentielle vérifiée par $a(r)$ dans le cas ultra-relativiste $\wp = \frac{\varepsilon}{3}$.

2. a) Justifier que l'invariance d'échelle impose $a'' = 0$ et $a' = Cste$.

b) Résoudre l'équation dans ces conditions.

VI. Approche de la limite d'un astre “ultra-relativiste”

1. • On étudie un astre décrit par le tenseur énergie-impulsion : $T^{\alpha\beta} = (\wp + \varepsilon_0)\, u^\alpha\, u^\beta - \wp\, g^{\alpha\beta}$, où $\wp$ et $\varepsilon_0 = \mu_0\, c^2$ désignent la pression et l'énergie volumique du solide, ici immobile.

• On raisonne avec une métrique de la forme : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2$.

• Dans ces conditions, les équations du champ et la loi d'équilibre statique permettent d'obtenir la relation : $\wp' = -\frac{\varepsilon+\wp}{2}\, \frac{a(r)+\chi\, r^3\, \wp}{r.(r-a(r))}$ avec $a(r) = \chi \int_0^r \varepsilon(r')\, r'^2\, dr'$.

• Pour décrire les astres dont la pression centrale s'approche de la limite ultra-relativiste $\wp = \frac{\varepsilon}{3}$ on se propose une modélisation mathématique sous la forme $\varepsilon(r) = \varepsilon_R + 3\,\wp$ (où $\varepsilon_R = \varepsilon(R)$ correspond à une énergie volumique qui serait uniforme si l'effet de la pression était négligeable).

◊ remarque : cette modélisation ne correspond pas à une interprétation physique, mais simplement une façon mathématiquement simple de décrire le fait que l'augmentation de la pression implique une augmentation de la température, faute de quoi la limite ultra-relativiste serait dépassée.

• En notant $\lambda = \frac{\chi\, \varepsilon_R}{3}$, montrer qu'on peut ainsi d'écrire l'équation précédente sous la forme :

$$6\,[a''(r)\, r - 2\, a'(r)]\, (r - a(r)) = (4\, a'(r) - 3\,\lambda\, r^2)\, [3\,\lambda\, r^3 - 3\, a(r) - r\, a'(r)] .$$

2. • Dans les cas étudiés ici, avec $a(0) = 0$, cette équation n'a pas de solution s'exprimant simplement. L'intégration numérique est en outre compliquée par une singularité à l'origine.

• Intégrer numériquement pour des conditions $\left\{a(r_0) \leq \frac{3}{7}\, r_0 \;;\; a'(r_0) \leq \frac{3}{7}\right\}$ avec r_0 voisin de l'origine. Commenter.

3. • Étudier les variations du rayon R et de $r_s = a(R)$ en fonction de la pression centrale $\wp_0$.

4. • On peut reprocher que la modélisation précédente ne respecte pas la limite : $T = \varepsilon - 3\,p \to 0$; même si elle correspond à : $T = \varepsilon_R \ll \lim(\varepsilon)$ et $\lim(p)$.

a) On peut alors proposer la relation : $\varepsilon^2 = \varepsilon_R^2 + 9\,p^2$; vérifier qu'elle respecte la condition limite de la trace $T = T^{\mu}{}_{\mu}$.

b) Montrer que cette expression a par contre l'inconvénient pour la vitesse du son : $v_{son} = c\,\sqrt{\frac{\partial p}{\partial \varepsilon}} \to \infty$ pour $p \to 0$.

c) On peut alors proposer la relation : $\varepsilon(r) = 3\,p + \frac{\varepsilon_R^2}{\varepsilon_R + p}$; vérifier qu'elle respecte les deux conditions précédentes.

d) Montrer que le rejet de la relation simple $\varepsilon(r) = \varepsilon_R + 3\,p$ (à cause de la limite de la trace T) n'était en fait pas vraiment justifié.

e) Établir l'équation correspondante pour $a(R)$.

5. • Procéder comme précédemment pour les intégrations numériques.

VII. Géométrie spatiale

1. • On commence par étudier un astre statique à symétrie sphérique, avec une masse volumique uniforme et en négligeant l'effet de la pression (ceci suppose que l'astre est nettement “non relativiste”, c'est à dire que son rayon de Schwarzschild est nettement inférieur à son rayon).

• Pour représenter l'effet du champ gravitationnel, on peut tenir compte du fait que pour un champ statique la quantité $\ln(\sqrt{A})$ se comporte comme un potentiel de gravitation ; il est alors possible d'utiliser l'analogie avec le potentiel de gravitation newtonien, qui au voisinage du sol est proportionnel à l'altitude z (cela a pour seul intérêt de s'appuyer sur notre habitude intuitive qualitative).

• On ne peut pas obtenir une représentation simple de l'effet dans $\mathbb{R}^3$, mais on peut utiliser des coordonnées cylindriques pour réaliser une image $3D$ (en perspective). Représenter ainsi $z = \ln(\sqrt{A})$ en fonction de coordonnées polaires ρ et θ , où $\rho = \int \sqrt{C}\,dr$ est le “rayon interne”.

2. • On souhaite ensuite obtenir une représentation géométrique de la courbure d'un plan de l'espace en l'incluant en tant que surface dans $\mathbb{R}^3$. On peut de même utiliser des coordonnées cylindriques pour réaliser une image $3D$ (en perspective)

• Représenter ainsi une surface d'équation $z = z(r)$ en fonction de coordonnées polaires r et θ , de telle façon que la distance radiale sur la surface soit égale au “rayon interne” ρ .

3. • On considère maintenant un astre dont la partie centrale est ultra-relativiste. On choisit pour cela une expression de l'énergie volumique de la forme : $\varepsilon(r) = 3\,p + \frac{\varepsilon_R^2}{\varepsilon_R + p}$ (avec ε_R en surface, pour $p = 0$).

• En procédant par intégration numérique, représenter de même $z = \ln(\sqrt{A})$ en fonction de coordonnées polaires ρ et θ .

4. • Représenter de même une surface d'équation $z = z(r)$ en fonction de coordonnées polaires r et θ , de telle façon que la distance radiale sur la surface soit égale au “rayon interne” ρ .

VIII. Pression dans un système en pré-expansion

1. • On raisonne ici en mécanique newtonienne pour simplement mettre en évidence les effets étudiés.

• Soit une tranche de fluide incompressible de masse volumique uniforme μ et de longueur L , initialement immobile dans un tube vertical sans frottement de section S . La tranche, située entre $z = 0$ et $z = L$, est soumise à un champ gravitationnel vertical vers le haut $g(z) = \frac{\alpha}{z+\eta}$ avec α et η constantes positives.

a) Établir l'équation différentielle non relativiste décrivant le mouvement du fluide.

b) Intégrer cette équation.

c) En déduire l'expression de la pression dans le fluide à l'instant initial ; la représenter et commenter.

2. • On considère une couche sphérique de fluide incompressible de masse volumique uniforme μ et d'épaisseur L , initialement immobile dans un cône sans frottement d'angle solide $\Omega = \pi \text{ sr}$, entre $r = R$ et $r = R + L$ (par rapport au sommet du cône).

• Pour décrire un cas analogue à celui qu'on souhaite simuler en relativité générale, avec r décroissant en fonction de la variable de position ρ (zone d'inversion en coordonnées “isotropes”), on considère $r = \eta - \rho$ (le centre, sommet du cône, correspond à $\rho = \eta$). Ainsi $\rho(R + L) < \rho(R)$.

• La couche est soumise à un champ gravitationnel radial $g = \frac{\alpha}{\rho}$ décroissant avec ρ et orienté vers les r décroissants (vers le centre).

a) Établir une équation différentielle décrivant le mouvement du fluide.

b) Préciser d'après la forme de l'écoulement, compte tenu de l'incompressibilité.

c) En déduire l'expression de la pression dans le fluide à l'instant initial ; la représenter et commenter.

IX. Astre avec une couche sphérique éjectée

1. • On cherche à résoudre les équations gravitationnelles pour une métrique à symétrie sphérique dépendant du temps, de la forme : $ds^2 = A(r,t)\, c^2\, dt^2 - C(r,t)\, dr^2 - r^2\, d\Omega^2$.

a) Calculer le tenseur de Ricci.

b) Exprimer le tenseur énergie-impulsion à l'intérieur de la matière, puis en déduire les équations d'Einstein.

c) Exprimer la loi de conservation du tenseur énergie-impulsion.

2. • On suppose que, même si elle n'est pas stable et ne le reste pas, la répartition de matière est initialement immobile.

a) Simplifier les équations d'Einstein dans ce cas. Commenter.

b) Simplifier de même la loi de conservation du tenseur énergie-impulsion. Commenter.

c) On suppose le fluide incompressible, écrire la loi de conservation du volume.

d) Résoudre (numériquement si nécessaire) le système d'équations. Commenter.