ÉLÉMENTS DE COSMOLOGIE - corrigé des exercices

I. Structures filamentaires

1.a. • Pour une métrique de la forme : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - D(r)\, d\theta^2 - E(r)\, dz^2$, on obtient :

$g_{00} = A$; $g_{11} = -C$; $g_{22} = -D$; $g_{33} = -E$;

$g^{00} = \frac{1}{A}$; $g^{11} = -\frac{1}{C}$; $g^{22} = -\frac{1}{D}$; $g^{33} = -\frac{1}{E}$;

$\Gamma_{001} = -\Gamma_{100} = \frac{A'}{2}$; $\Gamma_{111} = -\frac{C'}{2}$; $\Gamma_{221} = -\Gamma_{122} = -\frac{D'}{2}$; $\Gamma_{331} = -\Gamma_{133} = -\frac{E'}{2}$;

${\Gamma^0}_{01} = \frac{A'}{2\,A}$; ${\Gamma^1}_{00} = \frac{A'}{2\,C}$; ${\Gamma^1}_{11} = \frac{C'}{2\,C}$;

${\Gamma^2}_{21} = \frac{D'}{2\,D}$; ${\Gamma^1}_{22} = -\frac{D'}{2\,C}$; ${\Gamma^3}_{31} = \frac{E'}{2\,E}$; ${\Gamma^1}_{33} = -\frac{E'}{2\,C}$.

• On en déduit : $R_{00} = \frac{A''}{2\,C} - \frac{A'}{2\,C}\left(\frac{A'}{2\,A} + \frac{C'}{2\,C} - \frac{D'}{2\,D} - \frac{E'}{2\,E}\right)$;

$R_{11} = -\frac{A''}{2\,A} - \frac{D''}{2\,D} - \frac{E''}{2\,E} + \frac{A'}{2\,A}\left(\frac{A'}{2\,A} + \frac{C'}{2\,C}\right) + \frac{D'}{2\,D}\left(\frac{C'}{2\,C} + \frac{D'}{2\,D}\right) + \frac{E'}{2\,E}\left(\frac{C'}{2\,C} + \frac{E'}{2\,E}\right)$;

$R_{22} = -\frac{D''}{2\,C} - \frac{D'}{2\,C}\left(\frac{A'}{2\,A} - \frac{C'}{2\,C} - \frac{D'}{2\,D} + \frac{E'}{2\,E}\right)$;

$R_{33} = -\frac{E''}{2\,C} - \frac{E'}{2\,C}\left(\frac{A'}{2\,A} - \frac{C'}{2\,C} + \frac{D'}{2\,D} - \frac{E'}{2\,E}\right)$.

• Par ailleurs : $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$; $u^0 = \frac{1}{\sqrt{A}}$ et $u^k = 0$;

$T^{00} = \frac{1}{A}(\wp + \varepsilon) - \wp\, \frac{1}{A} = \frac{\varepsilon}{A}$; $T^{11} = \frac{\wp}{C}$; $T^{22} = \frac{\wp}{D}$; $T^{33} = \frac{\wp}{E}$;

$T = g_{\alpha\beta}\, T^{\alpha\beta} = \varepsilon - 3\,\wp$.

• Ceci correspond à : $T_{00} - \frac{1}{2} g_{00}\, T = A\, \frac{\varepsilon + 3\,\wp}{2}$; $T_{11} - \frac{1}{2} g_{11}\, T = C\, \frac{\varepsilon - \wp}{2}$;

$T_{22} - \frac{1}{2} g_{22}\, T = D\, \frac{\varepsilon - \wp}{2}$; $T_{33} - \frac{1}{2} g_{33}\, T = E\, \frac{\varepsilon - \wp}{2}$.

• Les équations du champ peuvent donc s'écrire, avec $\chi = \frac{8\pi\,\mathcal{G}}{c^4}$:

${R_0}^0 = \frac{A''}{2\,A\,C} - \frac{A'}{2\,A\,C}\left(\frac{A'}{2\,A} + \frac{C'}{2\,C} - \frac{D'}{2\,D} - \frac{E'}{2\,E}\right) = \chi\, \frac{\varepsilon + 3\,\wp}{2}$;

${R_1}^1 = \frac{A''}{2\,A\,C} + \frac{D''}{2\,C\,D} + \frac{E''}{2\,C\,E} - \frac{A'}{2\,A\,C}\left(\frac{A'}{2\,A} + \frac{C'}{2\,C}\right) - \frac{D'}{2\,C\,D}\left(\frac{C'}{2\,C} + \frac{D'}{2\,D}\right) - \frac{E'}{2\,C\,E}\left(\frac{C'}{2\,C} + \frac{E'}{2\,E}\right) = -\chi\, \frac{\varepsilon - \wp}{2}$;

${R_2}^2 = \frac{D''}{2\,C\,D} + \frac{D'}{2\,C\,D}\left(\frac{A'}{2\,A} - \frac{C'}{2\,C} - \frac{D'}{2\,D} + \frac{E'}{2\,E}\right) = -\chi\, \frac{\varepsilon - \wp}{2}$;

${R_3}^3 = \frac{E''}{2\,C\,E} + \frac{E'}{2\,C\,E}\left(\frac{A'}{2\,A} - \frac{C'}{2\,C} + \frac{D'}{2\,D} - \frac{E'}{2\,E}\right) = -\chi\, \frac{\varepsilon - \wp}{2}$.

1.b. • Pour éliminer les dérivées secondes, il suffit de considérer la combinaison :

$\frac{1}{2}({R_0}^0 - {R_1}^1 + {R_2}^2 + {R_3}^3\,) = \frac{A'}{2\,C\,A}\,\frac{D'}{2\,D} + \frac{D'}{2\,C\,D}\,\frac{E'}{2\,E} + \frac{E'}{2\,C\,E}\,\frac{A'}{2\,A} = \chi\,\wp$.

2.a. • La divergence du potentiel à l'infini n'est causée que par la limite de validité du modèle : on ne peut pas s'éloigner infiniment d'un fil “infini” ; le champ et le potentiel calculés ne sont qu'assez approximativement valables, à une distance grande en comparaison de l'épaisseur du fil, mais petite en comparaison de sa longueur.

2.b. • Avec $D = r^2$, l'équation la plus simple est la troisième : $\frac{A'}{A} - \frac{C'}{C} + \frac{E'}{E} = 0$.

• L'intégration donne : $\frac{E\,A}{C} = Cste$; on peut reporter pour simplifier les autres équations, surtout la première et la quatrième (on constate qu'elles sont identiques) :

$\frac{A''}{A} - \frac{A'}{A}\left(\frac{A'}{A} - \frac{1}{r}\right) = 0$; $\frac{E''}{E} - \frac{E'}{E}\left(\frac{E'}{E} - \frac{1}{r}\right) = 0$.

• En posant $A = e^\alpha$ on obtient : $\frac{A'}{A} = \alpha'$; $\frac{A''}{A} = \alpha'' + \alpha'^2$; $r\,\alpha'' + \alpha' = 0$.

• On en déduit : $\alpha' = \frac{n_a}{r}$; $\alpha = n_a\,\ln(r) + k_a$; $A = K_a\, r^{n_a}$; de même $E = K_e\, r^{n_e}$.

• Si on pouvait utiliser le comportement à l'infini pour déterminer les constantes n et K , on obtiendrait par exemple $n_e = 0$ et $K_e = 1$; mais ici le raisonnement serait faux puisque le modèle utilisé n'est plus valable à l'infini (on “normalise” généralement d'après la valeur à la limite R de la zone non vide).

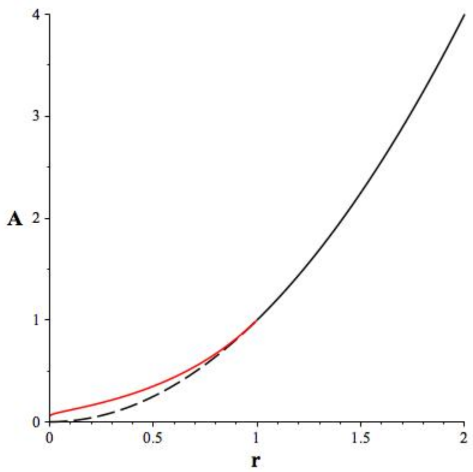
• Le report de ces résultats dans la troisième équation montre que $C = K_c\, r^{n_c}$ avec $n_c = n_a + n_e$, mais cela ne résout pas complètement.

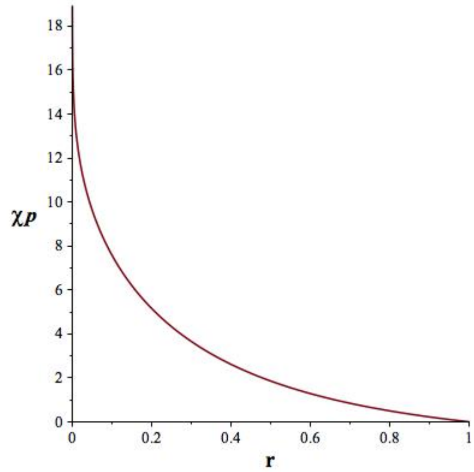
• On peut alors reporter les expressions précédentes dans la seconde équation, mais c'est plus simple avec l'équation combinée (simplifiée). On obtient ainsi : $n_e = -\frac{2\,n_a}{2+n_a}$, puis on en déduit : $n_c = \frac{n_a^2}{2+n_a}$.
◊ remarque : ceci semble tout à fait incompatible avec $n_e = 0$ évoqué précédemment.

2.c. • La loi relativiste de la statique des fluides peut s'écrire : $\partial_i \wp = -(\wp + \varepsilon)\, \partial_i\big(\ln\big(\sqrt{g_{00}}\big)\big)$. Par comparaison avec la loi non relativiste : $\partial_i \wp = -\mu\, \partial_i(\mathcal{V})$ où $\mathcal{V}$ est le potentiel de gravitation, ceci signifie que $\ln\big(\sqrt{A}\big)$ se comporte comme un potentiel. Pour obtenir une expression dont l'approximation non relativiste varie comme $\ln(r)$, il faut donc conclure que $A = K_a\, r^2$. Il n'y a par contre aucun effet analogue pour préciser l'expression de E .
• On obtient ainsi : $n_e = -1$ et $n_c = 1$. On n'a par contre aucune contrainte sur les constantes K .

2.d. • Pour un “filament” dont le rayon tendrait vers zéro, la quantité A tendrait vers zéro mais seulement pour $r = 0$ (singularité linéique) ; il ne peut donc pas y avoir d'effet “trou noir cylindrique”.

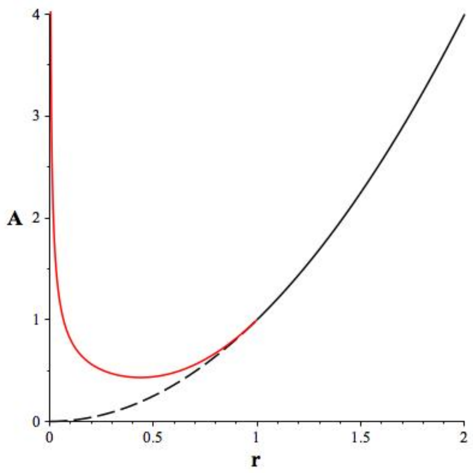
3.a. • On se propose d'intégrer avec la variable radiale “classique”, en supposant ε uniforme et en imposant les conditions limites pour raccorder à la solution extérieure proposée précédemment.
• Une difficulté apparait a priori : pour le cas intérieur, il y a cinq équations (non visiblement dépendantes : ${R_0}^0$; ${R_1}^1{}_{bis}$; ${R_2}^2$; ${R_3}^3$; statique) pour quatre inconnues (A , C , E , $\wp$). On pourait penser que c'est parce qu'il y a une équation pour déterminer D (ici imposé), mais non : on n'a fait ainsi que disposer d'un choix arbitraire.
• On peut intégrer en omettant ${R_1}^1{}_{bis}$ puis tester la validité ; on constate alors que $\wp$ est forcément ultra-relativiste (ci-après en unités réduites avec $R = 1$ (rayon du filament) et $\chi\, \varepsilon_R = 1$, mais les valeurs numériques choisies ne changent pas qualitativement ce comportement).

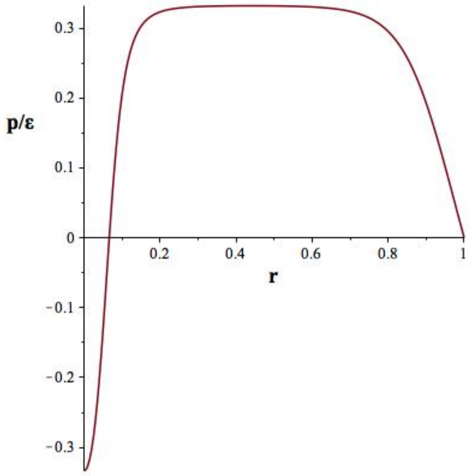




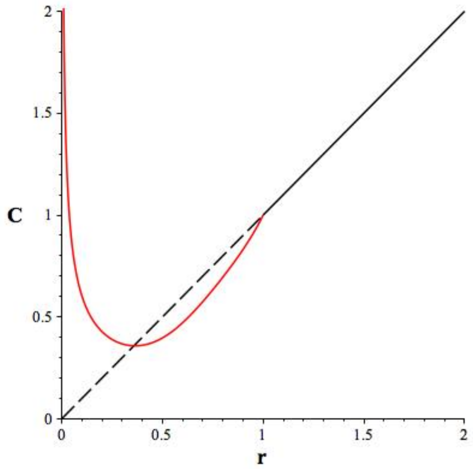
◊ remarque : il peut être intéressant de tester l'intégration analogue avec ${R_1}^1{}_{bis}$ à la place de ${R_3}^3$; on obtient une solution analogue mais un peu différente, ce qui montre une incompatibilité ; il est toutefois nécessaire de traiter le cas ultra-relativiste avant de pouvoir conclure.

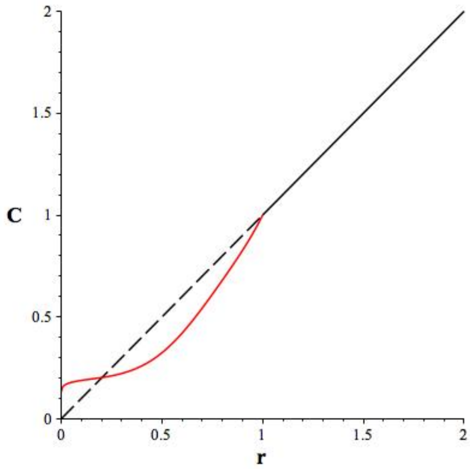
3.b. • On peut dans ce cas de même intégrer en omettant ${R_1}^1{}_{bis}$ puis tester la validité ; on constate alors que $\wp$ est incohérent au centre. Le résultat est par ailleurs analogue avec ${R_1}^1{}_{bis}$ à la place de ${R_3}^3$.

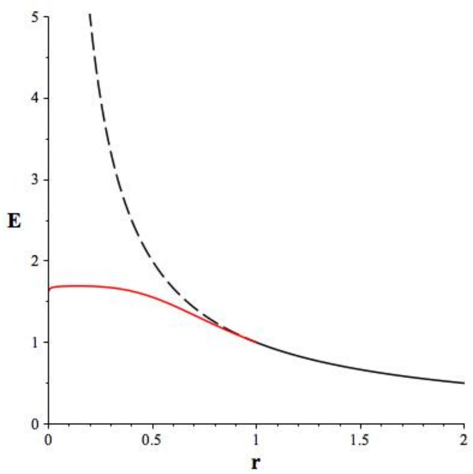


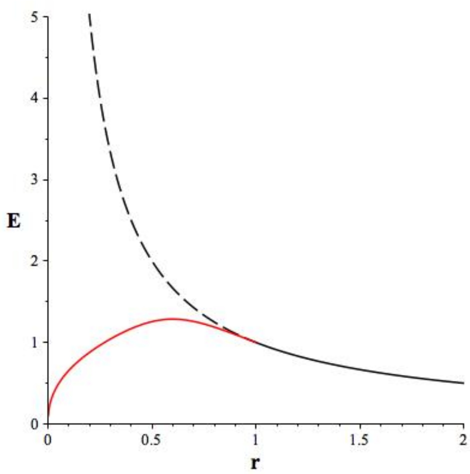


• Il est par ailleurs intéressant de tester la compatibilité des équations en comparant les résultats obtenus pour C et E selon qu'on utilise ${R_3}^3$ (à gauche) ou ${R_1}^1{}_{bis}$ (à droite) ; le résultat indique un problème.





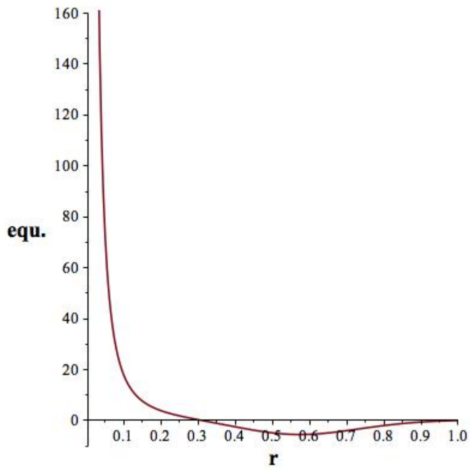




• On peut confirmer cette impression en écrivant l'équation ${R_3}^3$ sous forme avec second membre nul dans le cas où on intègre avec ${R_1}^1{}_{bis}$. Le graphique ainsi obtenu montre que les équations ne sont pas compatibles : en particulier ${R_3}^3$ n'est pas du tout vérifiée près de l'axe.

• Il est probable que cette incompatibilité soit due à l'impossibilité d'une solution cylindrique statique en relativité générale (si les équations non linéaires sont incompatibles avec la modélisation “infinie”). Le passage à la limite dans le cas non relativiste est en effet déjà sujet à controverse.

◊ remarque : le problème au centre ne peut pas provenir du fait que l'équation d'état imparfaite proposée a l'inconvénient que la vitesse de propagation du son $v = c\sqrt{\frac{\partial \wp}{\partial \varepsilon}}$ tend vers l'infini à pression nulle (ici le problème est au centre).



II. Fluide en “chute libre”

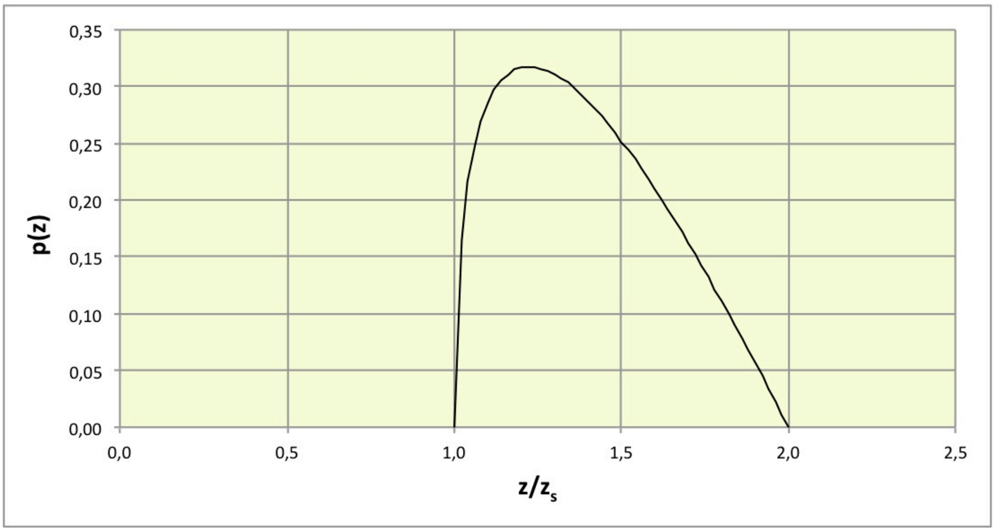
1.a. • En notant z la coordonnée verticale : $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$; la condition d'équilibre d'une tranche de fluide horizontale, de surface S et d'épaisseur dz, peut s'écrire :

$$dm\ \ddot{z} = 0 = -\,S\,\wp(z+dz) + S\,\wp(z) - g\,dm \quad \text{avec} \quad dm = \mu\,S\,dz\ .$$

• On obtient ainsi : $\frac{d\wp}{dz} = -\mu\,g$; $\wp(z) = \wp(0) - \mu\,g\,z$.

1.b. • La condition dynamique peut s'écrire : $dm\ \ddot{z} = -\,S\,\wp(z+dz) + S\,\wp(z) - g\,dm$ avec $dm = \mu\,S\,dz$.
• Puisque le fluide est incompressible, il se met en mouvement globalement avec la même accélération $\ddot{z} = -g$.
• On obtient ainsi : $\frac{d\wp}{dz} = -\mu\,.(\ddot{z}+g) = 0$; $\wp(z) = \wp(z_s) = Cste = 0$.

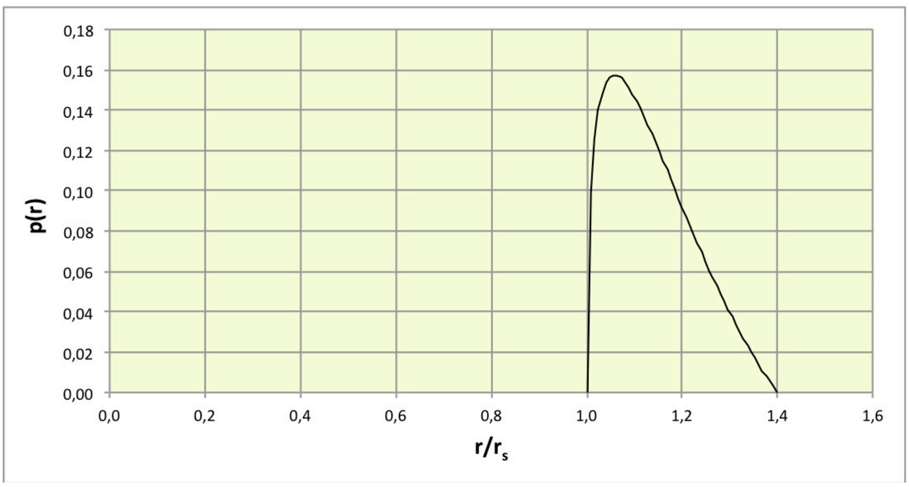
2. • La condition dynamique peut s'écrire : $dm\ \ddot{z} = -\,S\,\wp(z+dz) + S\,\wp(z) + \bar{g}\,dm$ avec $dm = \mu\,S\,dz$.
• Puisque le fluide est incompressible, il se met en mouvement globalement avec la même accélération : $\ddot{z} = a$.
• On obtient ainsi : $\frac{d\wp}{dz} = \mu\,.(\bar{g} - \ddot{z}) = \mu\,.\left(\frac{\alpha\,z}{\sqrt{z^2 - z_s^2}} - a\right)$; $\wp(z) = \mu\,.\left[\alpha\,\sqrt{z^2 - z_s^2} - a\,.(z - z_s)\right]$.
• La pression est nulle pour $z = z_s$ mais aussi pour $z = L$, donc : $a = \alpha\sqrt{\frac{L+z_s}{L-z_s}}$. Ainsi on peut écrire : $\wp(z) = \mu\,\alpha\,.\left[\sqrt{z^2 - z_s^2} - \sqrt{\frac{L+z_s}{L-z_s}}\,(z - z_s)\right]$.



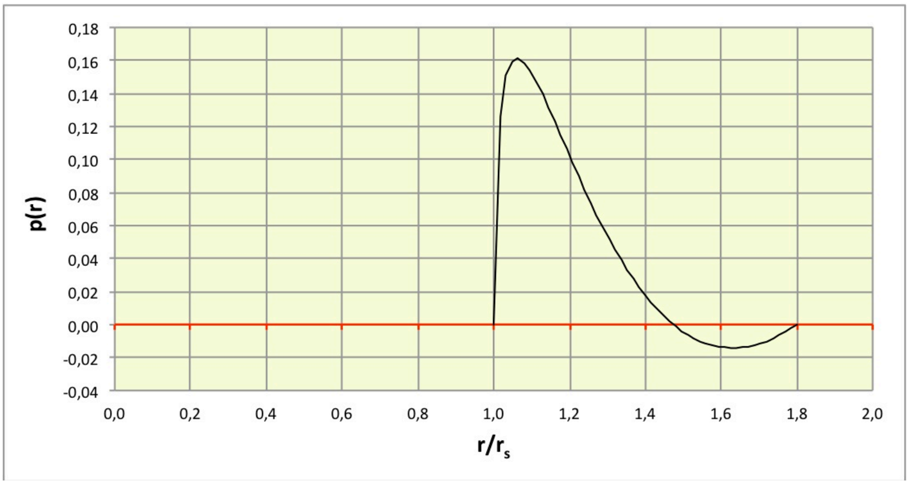
◊ remarque : il ne s'agit que de la compression initiale, puisque le champ de gravitation met ensuite la tranche en mouvement donc elle ne subit plus le même champ.
• Dans ces conditions, le fluide en dessous serait plus accéléré que le fluide supérieur, ce qui est impossible pour un fluide incompressible ; donc la tranche du bas “pousse” la tranche du haut, ce qui correspond à une compression.
◊ remarque : attention à l'ambiguïté du vocabulaire ; “incompressible” signifie que le volume ne diminue pas sous l'effet de la compression (et non qu'il n'y a pas de compression).

3.a. • La condition dynamique peut s'écrire pour une tranche de surface infinitésimale :
$$dm\ \ddot{r} = -\,dS\ \wp(r+dr) + dS\ \wp(r) - g\ dm \quad \text{avec} \quad dm = \mu\ dS\ dr\ .$$
• Puisque le fluide est incompressible, le flux de matière traversant un rayon r doit être indépendant de r : $4\pi\, r^2\, \dot{r} = Cste$. Il se met donc en mouvement globalement avec des accélérations respectant la même proportion que les vitesses : $\ddot{r} = a_R\ \frac{R^2}{r^2}$.
• Ceci peut s'écrire d'après la loi de conservation locale du courant de particules : $\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_n = 0$ avec $\vec{j}_n = n\,\vec{v}$. Pour un fluide incompressible $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ et $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_n = n\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$. Le mouvement radial en coordonnées sphériques correspond donc à : $r^2\,\dot{r} = Cste$.
◊ remarque : avec les notations de la relativité restreinte : $D_\mu [j_n]^\mu = 0$ où $[j_n]^\mu = n_0\, u^\mu$ (n_0 constante est la concentration des particules dans le référentiel propre) ; ainsi :
$$\partial_\mu u^\mu + \Gamma^\nu{}_{\nu\mu}\, u^\mu = \partial_\mu u^\mu + \frac{\partial_\mu\left(\sqrt{|g|}\right)}{\sqrt{|g|}}\ u^\mu = 0 \ ;\ \partial_\mu\left(\sqrt{|g|}\ u^\mu\right) = 0 \ ;$$
$$\sqrt{|g|} = r^2\ \sin(\theta) \text{ avec ici } \theta \text{ constant} \ ;\ \partial_\mu(r^2\, u^\mu) = 0 \ ;\ u^0 = c\ \frac{dt}{ds} = \gamma \ ;\ u^1 = \frac{dr}{ds} = \gamma\ \frac{\dot{r}}{c} \ ;$$
$$\frac{\partial(\gamma\, r^2)}{\partial t} + \frac{\partial(\gamma\, r^2\,\dot{r})}{\partial r} = 0 \ ;\ \gamma \approx 1 \text{ au début du mouvement} \ ;\ \frac{\partial(r^2\,\dot{r})}{\partial r} = 0\ .$$
• Pour les accélérations, il faut tenir compte du fait que la constante précédente dépend du temps : $r^2\,\dot{r} = \mathcal{C}(t)$; on peut ainsi écrire la vitesse en notation eulérienne : $\vec{v}(r,t) = \frac{\mathcal{C}(t)}{r^2}\ \vec{u}_r$. Ceci donne : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \left(\frac{\dot{\mathcal{C}}}{r^2} - 2\,\frac{\mathcal{C}^2}{r^5}\right)\vec{u}_r$; ainsi initialement : $\mathcal{C}(0) = 0$; $\vec{a}(r,0) = \frac{\dot{\mathcal{C}}(0)}{r^2}\ \vec{u}_r$; $a_R = \frac{\dot{\mathcal{C}}(0)}{R^2}$; $\ddot{r} = a_R\ \frac{R^2}{r^2}$.

• On obtient ainsi : $\frac{d\wp}{dr} = \mu\,.(\bar{g} - \ddot{r}) = \mu\,.\left[\frac{\alpha\, r}{\sqrt{r^2 - r_s^2}} - a_R\ \frac{R^2}{r^2}\right]$; $\wp(r_s) = 0$; $\wp(R) = 0$;
$$\wp(r) = \mu\,.\left[\alpha\,\sqrt{r^2 - r_s^2} + a_R\, R^2.\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_s}\right)\right].$$
• La pression est nulle pour $r = r_s$ mais aussi pour $r = R$, donc : $a_R = \alpha\ \frac{r_s}{R}\ \sqrt{\frac{R+r_s}{R-r_s}}$. Ainsi on peut écrire : $\wp(r) = \mu\,\alpha\,.\left[\sqrt{r^2 - r_s^2} - \sqrt{\frac{R+r_s}{R-r_s}}\ \frac{R}{r}\ (r - r_s)\right]$.



• L'étude des zéros montre que $\wp(r) < 0$ pour $r > \frac{1}{2}\left(\sqrt{(R+r_s)\left(R+r_s+\frac{4\,R}{R+r_s}\right)} - (R+r_s)\right)$, à condition que cette valeur soit inférieure à R, ce qui correspond à $R > r_s\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



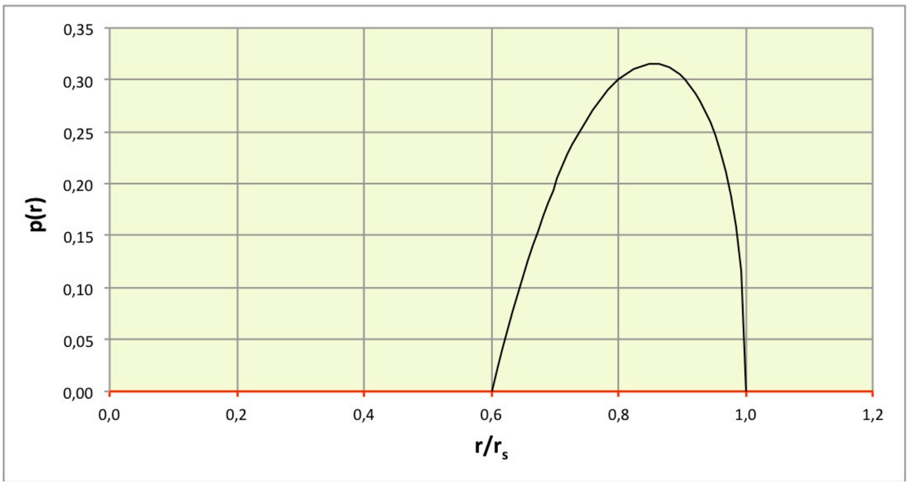
• Dans ces conditions, la pression est en réalité nulle (et non négative) dans la partie externe de la couche éjectée ; seule la partie interne est compressée lors de l'éjection. Cela vient du fait que la partie externe est moins repoussée par le champ, mais que son étalement l'autorise à s'éloigner moins vite sans que cela ne gène le mouvement des parties intérieures ; cette partie externe n'est alors pas comprimée (il faudrait y considérer la variation de la concentration n).

3.b. • Le mouvement impose comme précédemment des accélérations respectant la même proportion que les vitesses : $\ddot{r} = a_R\ \frac{R^2}{r^2}$, avec ici $a_R < 0$.

• On obtient ainsi : $\frac{d\wp}{dr} = \mu\,.(\bar{g} - \ddot{r}) = \mu\,.\left[-\frac{\alpha\, r}{\sqrt{{r_s}^2 - r^2}} - a_R\ \frac{R^2}{r^2}\right]$; $\wp(r_s) = 0$; $\wp(R) = 0$;

$\wp(r) = \mu\,.\left[\alpha\,\sqrt{{r_s}^2 - r^2} + a_R\, R^2.\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_s}\right)\right]$.

• La pression est nulle pour $r = r_s$ mais aussi pour $r = R$, donc : $a_R = -\alpha\ \frac{r_s}{R}\ \sqrt{\frac{r_s+R}{r_s-R}}$. Ainsi on peut écrire : $\wp(r) = \mu\,\alpha\,.\left[\sqrt{{r_s}^2 - r^2} - \sqrt{\frac{r_s+R}{r_s-R}}\ \frac{R}{r}\ (r_s - r)\right]$.



• L'étude des zéros montre que $p(r) \geq 0$ partout. Dans ce cas, la partie interne est moins attirée par le champ, donc cela tend à imposer une compression par la partie externe, plus attirée. En outre, même pour un champ égal, la contraction de la partie interne vers le centre lui imposerait de se rapprocher plus vite pour que cela ne gène pas le mouvement des parties externes ; ceci ne peut qu'accentuer l'effet de compression.

4.a. • La loi de conservation du tenseur d'énergie-impulsion peut s'écrire : $D_\beta T^{\alpha\beta} = 0$, avec pour un fluide : $T^{\alpha\beta} = (p + \varepsilon_0)\, u^\alpha\, u^\beta - p\, g^{\alpha\beta}$.
• Ceci peut s'écrire : $\partial_\beta(p + \varepsilon_0)\, u^\alpha\, u^\beta + (p + \varepsilon_0)\, D_\beta\big(u^\alpha\, u^\beta\big) - \partial_\beta p\; g^{\alpha\beta} = 0$.
• Puisque la seule composante non nulle de u^β est u^0 , l'indépendance du cas statique par rapport au temps permet de simplifier : $(p + \varepsilon_0)\, D_\beta\big(u^\alpha\, u^\beta\big) - \partial_\beta p\; g^{\alpha\beta} = 0$.
• On peut utiliser :

$$D_\beta\big(u^\alpha\, u^\beta\big) = \partial_\beta\big(u^\alpha\, u^\beta\big) + \Gamma^\alpha_{\ \lambda\beta}\, u^\lambda\, u^\beta + \Gamma^\beta_{\ \lambda\beta}\, u^\alpha\, u^\lambda \ ;$$

$$D_\beta\big(u^\alpha\, u^\beta\big) = \Gamma^\alpha_{\ \lambda\beta}\, u^\lambda\, u^\beta + \frac{\partial_\lambda\big(\sqrt{|g|}\big)}{\sqrt{|g|}}\, u^\alpha\, u^\lambda = \Gamma^\alpha_{\ \lambda\beta}\, u^\lambda\, u^\beta = \Gamma^\alpha_{\ 00}\, u^0\, u^0 \ ;$$

$$(p + \varepsilon_0)\, \Gamma_{\mu 00}\, u^0\, u^0 - \partial_\mu p = 0 \ ;$$

$$(p + \varepsilon_0)\, \tfrac{1}{2}\partial_\mu g_{00}\, u^0\, u^0 + \partial_\mu p = 0 \ .$$

• Compte tenu de : $g_{\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta = g_{00}\, u^0\, u^0 = 1$, on obtient (pour les composantes non nulles) :

$$\partial_i p = -(p + \varepsilon_0)\, \frac{\partial_i g_{00}}{2\, g_{00}} = -(p + \varepsilon_0)\, \partial_i\big(\ln\big(\sqrt{g_{00}}\big)\big) \ .$$

4.b. • On obtient dans ce cas : $p' = -(p + \varepsilon_0)\, \frac{A'}{2\,A}$.

4.c. • La loi de conservation $D_\beta T^{\alpha\beta} = 0$ donne : $\partial_\beta(p + \varepsilon_0)\, u^\alpha\, u^\beta + (p + \varepsilon_0)\, D_\beta\big(u^\alpha\, u^\beta\big) - \partial_\beta p\; g^{\alpha\beta} = 0$.
• Puisque initialement la seule composante non nulle de u^β est u^0 , on obtient initialement $\dot{p} = 0$; ceci permet alors de simplifier : $(p + \varepsilon_0)\, D_\beta\big(u^\alpha\, u^\beta\big) - \partial_\beta p\; g^{\alpha\beta} = 0$.
• On peut utiliser :

$$D_\beta\big(u^\alpha\, u^\beta\big) = \partial_\beta\big(u^\alpha\, u^\beta\big) + \Gamma^\alpha_{\ \lambda\beta}\, u^\lambda\, u^\beta + \Gamma^\beta_{\ \lambda\beta}\, u^\alpha\, u^\lambda \ ;$$

$$D_\beta\big(u^\alpha\, u^\beta\big) = \partial_\beta\big(u^\alpha\, u^\beta\big) + \Gamma^\alpha_{\ \lambda\beta}\, u^\lambda\, u^\beta + \frac{\partial_\lambda\big(\sqrt{|g|}\big)}{\sqrt{|g|}}\, u^\alpha\, u^\lambda \ .$$

• Mais initialement la seule composante non nulle de u^λ est u^0 , or $\partial_0\big(\sqrt{|g|}\big) = 0$; ainsi :

$$D_\beta\big(u^\alpha\, u^\beta\big) = \partial_\beta\big(u^\alpha\, u^\beta\big) + \Gamma^\alpha_{\ 00}\, u^0\, u^0 \ ;$$

$$(p + \varepsilon_0)\, \big[g_{\mu\alpha}\, \partial_0(u^\alpha\, u^0) + \Gamma_{\mu 00}\, u^0\, u^0\big] - \partial_\mu p = 0 \ ;$$

$$\partial_i p = -(p + \varepsilon_0)\, \left[\frac{\partial_i g_{00}}{2\, g_{00}} - \partial_0(u_i\, u^0)\right] .$$

• La composante considérée est $r = x^1$, ainsi :

$$u_1 = g_{11}\, u^1 = -C\, \frac{dr}{ds} \ ; \ u^0 = c\, \frac{dt}{ds} \ ;$$

$$\frac{1}{c}\, \frac{ds}{dt_{\ell oc}} = \frac{1}{c\sqrt{A}}\, \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 - \frac{C\, \dot{r}^2}{A\, c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{\gamma} \ ;$$

$$p' = -(p + \varepsilon_0)\, \left[\frac{A'}{2\,A} + \frac{C}{A\, c^2}\, \dot{\widehat{(\gamma^2\, \dot{r})}}\right] .$$

• Mais par ailleurs à l'instant initial : $\dot{\widehat{(\gamma^2\, \dot{r})}} = \ddot{r}\, \dfrac{1 + \frac{C\, \dot{r}^2}{A\, c^2}}{\left(1 - \frac{C\, \dot{r}^2}{A\, c^2}\right)^2} = \ddot{r}$; $p' = -(p + \varepsilon_0)\, \left[\frac{A'}{2\,A} + \frac{C}{A\, c^2}\, \ddot{r}\right]$.

◊ remarque : on peut préférer la formulation en fonction des grandeurs physiques plus “intuitives” $p'(\rho) = \frac{p'(r)}{\sqrt{C}}$ (avec $d\rho = d\ell$) et $\overset{\circ\circ}{\rho}(t_{\ell oc}) = \frac{d^2\rho(t_{\ell oc})}{dt_{\ell oc}^2} = \frac{\sqrt{C}}{A}\, \ddot{r}(t)$; ceci met en évidence l'équivalent du facteur $\bar{g} - \ddot{r}$ intervenant dans l'approximation newtonienne : $p'(\rho) = (p + \varepsilon_0)\, \left[-\frac{A'(\rho)}{2\,A} - \frac{\overset{\circ\circ}{\rho}(t_{\ell oc})}{c^2}\right]$.
• Puisque le fluide est incompressible, le flux de matière traversant un rayon r doit être indépendant de r : $4\pi\, r^2\, \sqrt{C(r)}\; \dot{r} = Cste$. Il se met donc en mouvement globalement avec des accélérations respectant la même proportion que les vitesses : $\ddot{r} = a_R\, \frac{R^2\, \sqrt{C(R)}}{r^2\, \sqrt{C(r)}}$.

• Ceci peut se préciser d'après la loi de conservation locale du courant de particules : $D_\mu [j_n]^\mu = 0$ où $[j_n]^\mu = n_0\, u^\mu$. Ainsi : $\partial_\mu\big(\sqrt{|g|}\, u^\mu\big) = 0$ avec $\sqrt{|g|} = \sqrt{A(r)\, C(r)}\ r^2\ \sin(\theta)$ et ici θ constant. Par ailleurs : $\sqrt{A}\, u^0 = c\ \frac{dt_{\ell oc}}{ds} = \gamma$; $\sqrt{A}\, u^1 = \sqrt{A}\ \frac{dr}{ds} = \gamma\ \frac{\dot{r}}{c}$; $\frac{\partial(\gamma \sqrt{C}\, r^2)}{\partial t} + \frac{\partial(\gamma \sqrt{C}\, r^2\, \dot{r})}{\partial r} = 0$; $\gamma \approx 1$ au début du mouvement ; $\frac{\partial(r^2 \sqrt{C}\, \dot{r})}{\partial r} = 0$; $r^2 \sqrt{C}\, \dot{r} = \mathcal{C}(t)$.

• Pour décrire les accélérations, on peut utiliser la notation eulérienne : $\dot{r}(r,t) = \frac{\mathcal{C}(t)}{r^2 \sqrt{C(r)}}$. Ceci donne : $\ddot{r} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial t} + \dot{r}\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} = \frac{\dot{\mathcal{C}}}{r^2 \sqrt{C(r)}} + \frac{\mathcal{C}^2}{2}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^4\, C}\right)$.

• Ainsi initialement : $\mathcal{C}(0) = 0$; $\ddot{r} = \frac{\dot{\mathcal{C}}}{r^2 \sqrt{C(r)}}$; $a_R = \frac{\dot{\mathcal{C}}(0)}{R^2 \sqrt{C(R)}}$; $\ddot{r} = a_R\ \frac{R^2 \sqrt{C(R)}}{r^2 \sqrt{C(r)}}$.

• La relation décrivant initialement la pression dans la couche éjectée peut donc s'écrire :

$$\wp' = -(\wp + \varepsilon_0)\ \left[\frac{A'}{2\, A} + K\ \frac{\sqrt{C}}{A\, r^2}\right] \text{ avec } K = \frac{a_R\, R^2 \sqrt{C(R)}}{c^2} .$$