ÉLEMENTS DE COSMOLOGIE - exercices

I. Structures filamentaires

1. • L'observation astronomique montre l'existence d'amas de galaxies sous forme de structures filamentaires à grande échelle. On étudie une telle structure dans l'approximation d'un filament rectiligne “infini”.

• On étudie le comportement qualitatif d'un filament décrit par le tenseur énergie-impulsion de type fluide : $T^{\alpha\beta} = (p + \varepsilon)\, u^\alpha\, u^\beta - p\, g^{\alpha\beta}$, où p et ε désignent la pression et l'énergie volumique du fluide, supposé immobile.

a) Écrire les équations du champ pour une métrique de la forme “cylindrique” :

$$ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - D(r)\, d\theta^2 - E(r)\, dz^2 \; .$$

b) Montrer que, par combinaison des quatre équations précédentes, on peut obtenir une équation sans dérivées secondes.

2. a) On étudie en premier le cas extérieur. L'étude analogue en électromagnétisme pour un fil uniformément chargé (par exemple à l'aide du théorème de Gauss, qui peut aussi être utilisé pour la gravitation non relativiste) donne un champ décroissant en $\frac{1}{r}$ et un potentiel variant comme $\ln(r)$, donc divergent à l'infini. Commenter.

b) En utilisant la variable radiale “classique” (rayon périphérique), intégrer les équations relativistes dans le vide.

c) Préciser l'intégration à l'aide de la loi de la statique des fluides.

d) Peut il exister un effet “trou noir cylindrique” pour ce type de systèmes ?

3. a) Intégrer numériquement les équations du cas intérieur en supposant ε uniforme ; en déduire les variations de p ; commenter.

b) Intégrer numériquement en supposant $\varepsilon(r) = \sqrt{\varepsilon_R^2 + 9\, p^2}$ avec $\varepsilon_R = \varepsilon(R)$; commenter.

II. Fluide en “chute libre”

1. • On raisonne préalablement en mécanique newtonienne, afin de se familiariser avec les équations impliquées dans les phénomènes considérés.

a) Établir la loi newtonienne de la statique des fluides incompressibles, soumis uniquement à la gravitation, dans un champ vertical uniforme. En déduire la pression en fonction de l'altitude z .

b) On considère (dans le vide) une tranche de fluide incompressible initialement immobile, comprise entre $z = z_s$ et $z = L > z_s$. Cette tranche est soumise à un champ de gravitation vertical uniforme ; en déduire la pression $p(z)$ à l'instant initial dans le cas de la chute libre.

2. • On considère la même tranche, mais soumise à un champ de gravitation $\vec{g}(z) = \frac{\alpha\, z}{\sqrt{z^2 - z_s^2}}\, \vec{u}_z$ (avec une constante $\alpha > 0$) ; en déduire la pression $p(z)$ à l'instant initial dans le cas de la “chute libre”.

3. a) On considère tranche analogue, mais à symétrie sphérique, comprise entre r_s et $R > r_s$. Cette tranche est soumise à un champ de gravitation $\vec{g}(r) = \frac{\alpha\, r}{\sqrt{r^2 - r_s^2}}\, \vec{u}_r$; en déduire la pression $p(r)$ à l'instant initial dans le cas de la “chute libre”.

b) On considère tranche analogue, à symétrie sphérique, comprise entre r_s et $R < r_s$. Cette tranche est soumise à un champ de gravitation $\vec{g}(r) = -\frac{\alpha\, r}{\sqrt{r_s^2 - r^2}}\, \vec{u}_r$; en déduire la pression $p(r)$ à l'instant initial dans le cas de la “chute libre”.

Donnée : en coordonnées sphériques : $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\, V_r) + \frac{1}{r\,\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin(\theta)\; V_\theta) + \frac{1}{r\,\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi} V_\varphi$.

4. • On raisonne maintenant en mécanique relativiste.

a) À partir de la loi de conservation du tenseur d'énergie-impulsion, établir et interpréter la loi de la statique des fluides soumis uniquement à la gravitation.

b) Préciser dans le cas d'une métrique de la forme : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - D(r)\, d\Omega^2$.

c) On considère une zone où le champ est répulsif $(A' < 0)$. En supposant un astre initialement immobile, établir l'équation d'équilibre intérieur modifiée pour tenir compte de l'éjection de la couche externe.