RG IV - ÉQUATIONS DU CHAMP DE GRAVITATION

1. Courbure (et torsion intrinsèque)

• Les quantités $DA^{\alpha} = D_{\mu}A^{\alpha}\,dx^{\mu}$ ont été construites pour remédier au fait que, dans un changement de coordonnées, les quantités $dA^{\alpha} = \partial_{\mu}A^{\alpha}\,dx^{\mu}$ ne se comportent pas comme les composantes d'un vecteur.

En étudiant de façon analogue les quantités $D(DA^{\alpha}) = D_{\mu}D_{\nu}A^{\alpha}\,dx^{\mu}\,dx^{\nu}$, on constate qu'en outre, contrairement aux dérivées “simples”, les dérivées covariantes ne commutent généralement pas : $D_{\mu}D_{\nu}A^{\alpha} \neq D_{\nu}D_{\mu}A^{\alpha}$.

• De façon générale (compte tenu de $\partial_{\mu}\partial_{\nu}A^{\alpha} = \partial_{\nu}\partial_{\mu}A^{\alpha}$) :

$$D_{\mu}D_{\nu}A^{\alpha} - D_{\nu}D_{\mu}A^{\alpha} = \left(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\right) D_{\lambda}A^{\alpha} \cdots$$
$$\cdots + \left(\partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\mu}\,\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu}\,\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}\right) A^{\lambda} .$$

La “torsion intrinsèque” est décrite par l'expression $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}$ (antisymétrique) ; elle est nulle dans un espace de Riemann.

La courbure est décrite par le tenseur de Riemann :

$$R^{\alpha}{}_{\lambda\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}\,\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}\,\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu} \quad ;$$

$$D_{\mu}D_{\nu}A^{\alpha} - D_{\nu}D_{\mu}A^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\lambda\mu\nu}\,A^{\lambda} \quad ;$$
$$D_{\mu}D_{\nu}A_{\beta} - D_{\nu}D_{\mu}A_{\beta} = -R^{\lambda}{}_{\beta\mu\nu}\,A_{\lambda} \quad ;$$
$$D_{\mu}D_{\nu}A^{\alpha}{}_{\beta} - D_{\nu}D_{\mu}A^{\alpha}{}_{\beta} = R^{\alpha}{}_{\lambda\mu\nu}\,A^{\lambda}{}_{\beta} - R^{\lambda}{}_{\beta\mu\nu}\,A^{\alpha}{}_{\lambda} .$$

2. Transport parallèle le long d'un contour fermé

• Cette notion de courbure est associée à la variation d'un vecteur lors d'un transport parallèle selon un contour fermé.

Par exemple en coordonnées sphériques :

◊ le transport de $\vec{u}_\theta(0\,;\varphi)$ jusqu'à l'équateur donne $\vec{u}_\theta\left(\frac{\pi}{2}\,;\varphi\right)$;

◊ puis le transport jusqu'à une autre longitude donne $\vec{u}_\theta\left(\frac{\pi}{2}\,;\varphi'\right)$;

◊ enfin le retour jusqu'au pôle donne $\vec{u}_\theta(0\,;\varphi') \neq \vec{u}_\theta(0\,;\varphi)$.

• De façon plus générale (d'après Stokes-Ostrogradski) :

$$\Delta A^\alpha = \oint \partial_\nu A^\alpha \, dx^\nu = -\oint {\Gamma^\alpha}_{\mu\nu} \, A^\mu \, dx^\nu = -\frac{1}{2} \int \varepsilon^{\nu\beta}_{\rho\sigma} \, \partial_\beta\left({\Gamma^\alpha}_{\mu\nu} \, A^\mu\right) dS^{\rho\sigma} \quad ;$$

$$\Delta A^\alpha = -\frac{1}{2} \int \left(\partial_\sigma\left({\Gamma^\alpha}_{\mu\rho} \, A^\mu\right) - \partial_\rho\left({\Gamma^\alpha}_{\mu\sigma} \, A^\mu\right)\right) dS^{\rho\sigma} \quad ;$$

$$\Delta A^\alpha = \frac{1}{2} \int {R^\alpha}_{\lambda\rho\sigma} \, A^\mu \, dS^{\rho\sigma} \; .$$

📖 *exercices n° I et II.*

3. Propriétés du tenseur de courbure

• La relation de définition montre simplement l'antisymétrie sur les deux dernier indices : ${R^\alpha}_{\lambda\nu\mu} = -{R^\alpha}_{\lambda\mu\nu}$.

On vérifie aussi la symétrie par permutation circulaire sur les trois derniers indices : ${R^\alpha}_{\lambda\mu\nu} + {R^\alpha}_{\mu\nu\lambda} + {R^\alpha}_{\nu\lambda\mu} = 0$.

• Plus de propriétés peuvent êtres mises en évidence sous forme totalement covariante, où on peut ré-exprimer les dérivées des Γ à l'aide de la métrique :

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + \partial_{\kappa\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\kappa\mu} g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu}\right) + g_{\alpha\beta} \, . \left({\Gamma^\alpha}_{\lambda\mu} \, {\Gamma^\beta}_{\kappa\nu} - {\Gamma^\alpha}_{\kappa\mu} \, {\Gamma^\beta}_{\lambda\nu}\right) .$$

Sous cette forme, on constate les symétries et antisymétries (dont certaines sont équivalentes à celles vues précédemment) :

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda} \quad ;$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu} = R_{\lambda\kappa\nu\mu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu} \quad ;$$

$R_{\kappa\lambda\mu\nu} + R_{\kappa\mu\nu\lambda} + R_{\kappa\nu\lambda\mu} = 0$ (donc aussi : $\mathcal{E}^{\kappa\lambda\mu\nu} \, R_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0$).

• On peut par ailleurs considérer les combinaisons de dérivées :

$$\left(D_{\alpha\beta} - D_{\beta\alpha}\right) D_\mu A_\nu + \mathrm{p.circ.}(\alpha\beta\mu) = D_\mu\left(D_{\alpha\beta} - D_{\beta\alpha}\right) A_\nu + \mathrm{p.circ.}(\alpha\beta\mu) \quad ;$$

$${R^\lambda}_{\mu\alpha\beta} \, D_\lambda A_\nu + \mathrm{p.circ.}(\alpha\beta\mu) = A_\lambda \, D_\mu {R^\lambda}_{\nu\alpha\beta} + \mathrm{p.circ.}(\alpha\beta\mu) \quad ;$$

$$0 = A_\lambda \, . \left(D_\mu {R^\lambda}_{\nu\alpha\beta} + D_\alpha {R^\lambda}_{\nu\beta\mu} + D_\beta {R^\lambda}_{\nu\mu\alpha}\right) .$$

Puisque A_λ est quelconque ; les dérivées du tenseur de Riemann sont liées par l'identité de Bianchi : $D_\mu R^\lambda{}_{\nu\alpha\beta} + D_\alpha R^\lambda{}_{\nu\beta\mu} + D_\beta R^\lambda{}_{\nu\mu\alpha} = 0$.

◊ remarque : compte tenu de $D_\mu g_{\kappa\lambda} = 0$, il en est de même sous forme totalement covariante : $D_\mu R_{\lambda\nu\alpha\beta} + D_\alpha R_{\lambda\nu\beta\mu} + D_\beta R_{\lambda\nu\mu\alpha} = 0$.

📖 *exercice n° III.*

4. Tenseur de Ricci et courbure scalaire

• D'après les symétries et antisymétries sur les indices, il n'y a (au signe près) qu'une seule façon de contracter le tenseur de courbure pour obtenir un tenseur du second ordre :

$$g^{\kappa\lambda} R_{\kappa\lambda\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0 \;\; ;$$

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} = g^{\kappa\lambda} R_{\kappa\mu\lambda\nu} = g^{\kappa\lambda} R_{\mu\kappa\nu\lambda} = -g^{\kappa\lambda} R_{\kappa\mu\nu\lambda} = -g^{\kappa\lambda} R_{\mu\kappa\lambda\nu} \; .$$

Le tenseur de Ricci ainsi défini est symétrique :

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} = R^\kappa{}_{\mu\kappa\nu} = \partial_\kappa \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\kappa{}_{\mu\kappa} + \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\,\Gamma^\kappa{}_{\rho\kappa} - \Gamma^\rho{}_{\mu\kappa}\,\Gamma^\kappa{}_{\nu\rho} \; .$$

◊ remarque : la symétrie, peu visible à cause du terme $\partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda} = \partial_{\mu\nu} \ln\left(\sqrt{|g|}\right)$, devient évidente sous d'autres formes d'expression :

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\kappa\lambda} . \left(\partial_{\mu\lambda} g_{\kappa\nu} + \partial_{\kappa\nu} g_{\mu\lambda} - \partial_{\kappa\lambda} g_{\mu\nu} - \partial_{\mu\nu} g_{\kappa\lambda}\right) \cdots$$

$$\cdots + g^{\kappa\lambda}\, g_{\alpha\beta} \left(\Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda}\,\Gamma^\beta{}_{\kappa\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\kappa\lambda}\,\Gamma^\beta{}_{\mu\nu}\right) \;\; ;$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\, \partial_\lambda\left(\sqrt{|g|}\, \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\right) - \partial_{\mu\nu} \ln\left(\sqrt{|g|}\right) - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\,\Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} \; .$$

• On peut aussi définir une courbure scalaire : $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.

• Il découle alors de l'identité de Bianchi :

$$D_\mu R_{\nu\beta} + D_\alpha R^\alpha{}_{\nu\beta\mu} - D_\beta R_{\nu\mu} = 0 \;\; ;$$

$$D_\mu R - D_\alpha\left(g^{\kappa\alpha} R_{\kappa\mu}\right) - D_\beta R^\beta{}_\mu = D_\alpha\left(\delta^\alpha_\mu\, R - 2\, R^\alpha{}_\mu\right) = 0 \;\; ;$$

$$D_\alpha \left(R^{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\, g^{\alpha\mu}\, R\right) = 0 \; .$$

📖 *exercices n° IV et V.*

5. Tenseur énergie-impulsion

• En électromagnétisme, les potentiels (et champs) sont déterminés par les répartitions de charge et de courant.

Pour la gravitation, il semble donc logique de chercher des équations reliant la métrique (et la connexion) aux répartitions de masse et au tenseur énergie-impulsion. On commence donc par préciser ce dernier.

• Le tenseur énergie-impulsion pour des particules matérielles peut s'écrire : $T^{\alpha\beta} = \mu_0 \, U^\alpha U^\beta$, où μ_0 est la masse volumique dans le référentiel propre (associée à une distribution $\tilde{\delta}$ pour chaque particule).

• Pour un fluide : $T^{\alpha\beta} = (\wp + \varepsilon_0) \, u^\alpha u^\beta - \wp \, g^{\alpha\beta}$, où $\wp$ et $\varepsilon_0 = \mu_0 \, c^2$ désignent la pression et la densité volumique d'énergie du fluide mesurées dans son référentiel propre.

☞ remarque : ici l'énergie volumique ε_0 tient compte de l'énergie d'agitation thermique du fluide (molécules non immobiles dans son référentiel propre).

• L'expression pour le champ électromagnétique se généralise simplement depuis la relativité restreinte : $T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{\mathrm{\mu}_0} \left(g_{\mu\nu} \, F^{\alpha\mu} \, F^{\nu\beta} - \frac{1}{4} \, g^{\alpha\beta} \, F_{\mu\nu} \, F^{\nu\mu} \right)$.

◊ remarque : selon le contexte, il faut ne pas confondre la masse volumique au repos μ_0 et la perméabilité magnétique $\mathrm{\mu}_0$ (ni l'énergie volumique ε_0 et la permittivité diélectrique $\mathrm{\varepsilon}_0$).

📖 *exercice n° VI.*

6. Équations du champ de gravitation

• L'équation gravitationnelle non relativiste peut être écrite avec le potentiel $\mathcal{V}$: $\Delta\mathcal{V} = \vec{\nabla}^2 \, \mathcal{V} = 4 \, \pi \, \mathcal{G} \, \mu$, où μ est la masse volumique (dans laquelle la contribution relativiste de l'agitation thermique est négligeable).

L'étude des trajectoires géodésiques montre par ailleurs que le cas relativiste pour les champs statiques faibles doit correspondre à : $g_{00} \approx 1 + \frac{2\,\mathcal{V}}{c^2}$.

Dans la mesure où ce cas correspond aussi à : $T_{00} = \mu_0\, c^2$, on doit chercher une équation relativiste dont la limite soit : $\vec{\nabla}^2 g_{00} \approx \chi\, T_{00}$, avec la constante $\chi = \frac{8\,\pi\,\mathcal{G}}{c^4}$.

• Puisque ceci suggère une équation de la forme $G_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta}$, on cherche à construire, à partir des dérivées premières et secondes des “potentiels” $g_{\alpha\beta}$, un tenseur $G_{\alpha\beta}$ symétrique et “conservé” comme $T_{\alpha\beta}$ (tel que $D_\mu G^{\mu\nu} = 0$) et dont la limite redonne : $G_{00} \approx \vec{\nabla}^2 g_{00}$.

Ceci peut correspondre à une combinaison : $G_{\alpha\beta} = C.\left(R_{\alpha\beta} + \lambda\, g_{\alpha\beta}\, R\right)$; on peut en fait montrer qu'il n'y en a pas d'autres.

• Puisque l'identité de Bianchi implique : $D_\alpha\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\, R\right) = 0$, l'existence d'une valeur autre que $\lambda = -\frac{1}{2}$ imposerait $\partial_\alpha R = 0$.

L'équation cherchée imposant par ailleurs : $G = C.(1 + 4\,\lambda)\, R = \chi\, T$ (en posant $T = T_\mu{}^\mu$), ceci conduirait à $\partial_\alpha T = 0$, ce qui n'est vérifié que dans des cas particuliers.

• La condition limite $G_{00} \approx \vec{\nabla}^2 g_{00}$ impose enfin $C = 1$, donc l'équation cherchée est : $R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\, R = \chi\, T^{\alpha\beta}$ (équation d'Einstein).

◊ remarque : quand cela simplifie certains calculs, on peut aussi l'écrire sous la forme : $R^{\alpha\beta} = \chi\,.\left(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\, T\right)$.

• D'un autre point de vue, dans la mesure où on interprète les $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ comme l'équivalent d'un “champ gravitationnel” (dérivé du “potentiel” $g_{\mu\nu}$), on peut se baser sur la forme du tenseur $T^{\alpha\beta}$ électromagnétique pour écrire :

$$\chi\, \mathcal{T}_{\alpha\beta} = \left(\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu}\, \Gamma^\mu{}_{\beta\rho} - \Gamma^\rho{}_{\alpha\beta}\, \Gamma^\mu{}_{\rho\mu}\right) - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta}\, g^{\lambda\nu}\,.\left(\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}\, \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} - \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu}\, \Gamma^\mu{}_{\rho\mu}\right) \;;$$

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} \;;\; \mathcal{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta}\, \mathcal{R} = \chi\,.\left(\mathcal{T}_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}\right) .$$

On retrouve ainsi une équation analogue à celle de l'électromagnétisme : les dérivées du champ se calculent d'après les termes de source, incluant un terme gravitationnel quadratique par rapport au champ.

Le tenseur $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ indique alors qualitativement la contribution de l'énergie du champ gravitationnel à sa propre création (contrairement à ce que peut suggérer la précédente remarque, un choix différent des coefficients $\frac{1}{2}$ pour les termes de trace des tenseurs ne modifie pas $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$).

📖 *exercices n° VII, VIII, IX et X.*

7. Énergie-impulsion du champ de gravitation

• En l'absence de champ de gravitation, la conservation de l'énergie-impulsion “totale” (particules plus champ électromagnétique) s'écrit : $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$.

Avec un champ gravitationnel, cette relation reste valable dans un repère inertiel, donc pour un repérage quelconque elle se généralise par $D_\beta T^{\alpha\beta} = 0$. Par contre, cela ne correspond plus a priori à une loi de conservation.

• En réécrivant sous la forme : $D_\beta T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\, \partial_\beta\left(\sqrt{|g|}\, T^{\alpha\beta}\right) + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\beta}\, T^{\lambda\beta} = 0$, on obtient : $\partial_\beta\left(\sqrt{|g|}\, T^{\alpha\beta}\right) = -\sqrt{|g|}\, \Gamma^\alpha{}_{\lambda\beta}\, T^{\lambda\beta} = -\frac{1}{\chi}\sqrt{|g|}\, \Gamma^\alpha{}_{\lambda\beta} \, .\left(R^{\lambda\beta} - \frac{1}{2}\, g^{\lambda\beta}\, R\right)$.

Existe-t-il $\mathrm{t}^{\lambda\beta}$ tel que : $\frac{1}{\chi}\sqrt{|g|}\, \Gamma^\alpha{}_{\lambda\beta} \, .\left(R^{\lambda\beta} - \frac{1}{2}\, g^{\lambda\beta}\, R\right) = \partial_\beta\left(\sqrt{|g|}\, \mathrm{t}^{\alpha\beta}\right)$, décrivant ainsi l'énergie-impulsion du champ gravitationnel ?

Une telle quantité, a priori non nécessairement tensorielle (pseudo-tenseur ?), correspondrait à la loi de conservation : $\partial_\beta \left(\sqrt{|g|}\, \left(T^{\alpha\beta} + \mathrm{t}^{\alpha\beta}\right)\right) = 0$.

D'un certain point de vue, quand on cherche à exprimer l'énergie-impulsion du champ de gravitation, cela consiste à décrire la quantité de mouvement de l'espace-temps (décrit par la métrique), par rapport à... l'espace-temps (ce qui est a priori incohérent). Cela peut toutefois avoir un intérêt pour des perturbations locales comme les ondes gravitationnelles : afin de décrire l'énergie-impulsion transportée par ces ondes dans un espace environnant plat.

8. Étude variationnelle

8.1. Action pour le champ de gravitation

• Pour déduire les équations du champ gravitationnel par une méthode variationnelle, il faut commencer par déterminer l'action correspondante, de la forme : $\mathcal{S} = \int \Lambda \, d^4\mathcal{V}$ avec une densité lagrangienne $\Lambda\big(g_{\mu\nu} \, , \, \partial_\lambda g_{\mu\nu}\big)$ scalaire, intégrée sur $d^4\mathcal{V} = \sqrt{|g|} \, d^4x$.

La seule quantité scalaire qu'on puisse former avec les quantités concernées est $R = g^{\alpha\beta} \, R_{\alpha\beta}$, mais cette expression contient aussi des termes du second ordre $\partial_{\lambda\rho} g_{\mu\nu}$. On peut alors chercher s'il existe une grandeur Λ seulement “pseudo” scalaire, mais donnant par variation une expression correctement tensorielle ; or les termes du second ordre ne sont pas rédhibitoires si leur contribution par variation peut se ramener celle de termes du premier ordre.

• On peut alors considérer :

$$\sqrt{|g|} \, R = \sqrt{|g|} \, g^{\alpha\beta} \, . \Big[\partial_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} + \Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} \, \Gamma^\mu{}_{\rho\mu} - \Gamma^\rho{}_{\alpha\mu} \, \Gamma^\mu{}_{\beta\rho}\Big] \, .$$

Les termes du second ordre peuvent s'écrire :

$$\sqrt{|g|} \, g^{\alpha\beta} \, \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \partial_\mu\Big(\sqrt{|g|} \, g^{\alpha\beta} \, \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\Big) \cdots$$

$$\cdots + \sqrt{|g|} \, g^{\alpha\beta} \, . \Big[2 \, \Gamma^\mu{}_{\alpha\rho} \, \Gamma^\rho{}_{\beta\mu} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \, \Gamma^\rho{}_{\mu\rho}\Big] \;\; ;$$

$$\sqrt{|g|} \, g^{\alpha\beta} \, \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} = \partial_\beta\big(\sqrt{|g|} \, g^{\alpha\beta} \, \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu}\big) + \sqrt{|g|} \, g^{\alpha\beta} \, . \Big[\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \, \Gamma^\rho{}_{\mu\rho}\Big] \, .$$

Les termes $\partial_\mu\Big(\sqrt{|g|} \, g^{\alpha\beta} \, \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\Big)$ et $\partial_\beta\big(\sqrt{|g|} \, g^{\alpha\beta} \, \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu}\big)$ sont des divergences dont l'intégration peut s'écrire comme le flux d'un vecteur à travers une hypersurface à l'infini, où les variations de la métrique sont nulles ; leurs contributions à la méthode variationnelle sont donc nulles.

Ainsi on peut définir Λ de la forme souhaitée (avec une constante multiplicative pour faire correspondre les unités) :

$$\sqrt{|g|} \, R = \sqrt{|g|} \, \Lambda + \partial_\mu\Big(\sqrt{|g|} \, g^{\alpha\beta} \, \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\Big) - \partial_\beta\big(\sqrt{|g|} \, g^{\alpha\beta} \, \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu}\big) \;\; ;$$

$$2 \, c \, \chi \, \Lambda = g^{\alpha\beta} . \Big[\Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} \, \Gamma^\mu{}_{\rho\mu} - \Gamma^\rho{}_{\alpha\mu} \, \Gamma^\mu{}_{\beta\rho}\Big] + 2 \, g^{\alpha\beta} \, . \Big[\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu} \, \Gamma^\mu{}_{\beta\rho} - \Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} \, \Gamma^\mu{}_{\rho\mu}\Big] \;\; ;$$

$$\Lambda = \frac{1}{2\,c} \, \frac{1}{\chi} \, g^{\alpha\beta} \, . \Big[\Gamma^\rho{}_{\alpha\mu} \, \Gamma^\mu{}_{\beta\rho} - \Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} \, \Gamma^\mu{}_{\rho\mu}\Big] \, .$$

🕮 *exercices n° XI et XII.*

8.2. Terme gravitationnel de l'équation d'Einstein

• Compte tenu de ce qui précède, on peut raisonner avec R :

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2\,c}\,\frac{1}{\chi}\;\delta\!\left(\int g^{\alpha\beta}\,R_{\alpha\beta}\,\sqrt{|g|}\;d^4x\right)\;;$$

$$\delta\!\left(g^{\alpha\beta}\,R_{\alpha\beta}\,\sqrt{|g|}\,\right) = R_{\alpha\beta}\,\sqrt{|g|}\;\delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\,\sqrt{|g|}\;\;\delta R_{\alpha\beta} + R\;\delta\!\left(\sqrt{|g|}\,\right).$$

• On peut considérer :

$$\delta\!\left(\sqrt{|g|}\,\right) = \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\;\delta g\;\;;$$

$\delta g = \gamma^{\alpha\beta}\;\delta g_{\alpha\beta}$ où les $\gamma^{\alpha\beta}$ sont les mineurs associés ;

$g^{\alpha\beta} = \frac{\gamma^{\alpha\beta}}{g}$ est la matrice inverse de $g_{\alpha\beta}$;

$\delta g = g\;g^{\alpha\beta}\;\delta g_{\alpha\beta} = -g\;g_{\alpha\beta}\;\delta g^{\alpha\beta}$ puisque $\delta\!\left(g_{\alpha\beta}\;g^{\alpha\beta}\right) = 0$;

$$\delta\!\left(\sqrt{|g|}\,\right) = \frac{1}{2}\;\sqrt{|g|}\;g_{\alpha\beta}\;\delta g^{\alpha\beta}\;.$$

• On peut en outre montrer que $g^{\alpha\beta}\,\sqrt{|g|}\;\;\delta R_{\alpha\beta}$ donne une contribution nulle par intégration ; ainsi : $\delta\mathcal{S} = \frac{1}{2\,c}\,\frac{1}{\chi}\int \delta g^{\alpha\beta}.\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\;g_{\alpha\beta}\;R\right)\;\sqrt{|g|}\;d^4x$.

◊ remarque : les variations $\delta g_{\mu\nu}$ considérées ici sont celles qui correspondent à une modification de la géométrie spatio-temporelle, non celles associées à un changement du repérage dans un espace-temps donné ; cela n'intervient toutefois pas dans le calcul.

◊ remarque : si on préfère “par principe” l'expression en fonction des variations des variables $g_{\alpha\beta}$, on écrit : $\delta\mathcal{S} = -\frac{1}{2\,c}\,\frac{1}{\chi}\int \delta g_{\alpha\beta}\,.\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\;g^{\alpha\beta}\;R\right)\;\sqrt{|g|}\;d^4x$.

🕮 *exercices n° XIII et XIV.*

8.3. Terme “matériel” de l'équation d'Einstein

• En utilisant la même méthode qu'en relativité restreinte, on peut obtenir la forme symétrique du tenseur d'énergie impulsion en écrivant :

$$\delta\mathcal{S} = \frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial\!\left(\Lambda\sqrt{|g|}\,\right)}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\rho\left(\frac{\partial\!\left(\Lambda\sqrt{|g|}\,\right)}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})}\right)\right)\;\delta g_{\mu\nu}\;d^4x = -\frac{1}{2\,c}\int T^{\mu\nu}\;\delta g_{\mu\nu}\;\sqrt{|g|}\;d^4x\;.$$

◊ remarque : ce terme décrit la partie matérielle, mais aussi le champ électromagnétique.

Au total on obtient l'équation d'Einstein : $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, R = \chi\, T^{\mu\nu}$.

• Pour retrouver $\delta\mathcal{S}$ avec $\mathcal{S} = -m\,c \int ds$ pour une particule matérielle, on est conduit à considérer : $T^{\mu\nu} = m\,c \int \frac{dX^\mu}{ds} \frac{dX^\nu}{ds}\, \tilde{\delta}^4(x - X)\, ds$ (intégré sur la trajectoire) ; ceci est analogue au courant $j^\mu = q \int \frac{dX^\mu}{ds}\, \tilde{\delta}^4(x - X)\, ds$ en électromagnétisme.

L'éventuelle expression correspondante de Λ n'apparait pas de façon claire et semble être partout éludée (mais l'écriture du lagrangien à l'aide d'une densité lagrangienne n'est pas obligatoire). Si on pouvait considérer que, pour ce cas, $T^{\mu\nu}$ ne dépend pas des $g_{\mu\nu}$ alors $\Lambda = T = T^{\mu\nu}\, g_{\mu\nu}$ donnerait $\delta\Lambda = T^{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu}$, mais cela semble incompatible avec $\mathcal{S} = -m\,c \int ds$ dépendant des $g_{\mu\nu}$.

📖 *exercice n° XV.*

8.4. Énergie-impulsion du champ de gravitation

• On peut appliquer, en fonction du “potentiel” $g_{\mu\nu}$, une méthode analogue à celle utilisée pour le champ électromagnétique en fonction du potentiel A_α .

• La densité lagrangienne est telle que :

$$\partial_\alpha\left(\Lambda \sqrt{|g|}\,\right) = \frac{\partial\left(\Lambda \sqrt{|g|}\,\right)}{\partial g_{\mu\nu}}\, \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \frac{\partial\left(\Lambda \sqrt{|g|}\,\right)}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})}\, \partial_\alpha\left(\partial_\rho g_{\mu\nu}\right) .$$

D'après les équations d'Euler-Lagrange : $\frac{\partial\left(\Lambda \sqrt{|g|}\,\right)}{\partial g_{\mu\nu}} = \partial_\rho \left(\frac{\partial\left(\Lambda \sqrt{|g|}\,\right)}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})}\right)$; ainsi :

$$\partial_\alpha\left(\Lambda \sqrt{|g|}\,\right) = \partial_\rho \left(\frac{\partial\left(\Lambda \sqrt{|g|}\,\right)}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})}\right) \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \frac{\partial\left(\Lambda \sqrt{|g|}\,\right)}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})}\, \partial_\rho\left(\partial_\alpha g_{\mu\nu}\right) \;;$$

$$\delta_\alpha^\rho\, \partial_\rho\left(\Lambda \sqrt{|g|}\,\right) = \partial_\rho \left(\frac{\partial\left(\Lambda \sqrt{|g|}\,\right)}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})}\, \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right) \;;$$

$$\partial_\rho \left(\frac{\partial\left(\Lambda \sqrt{|g|}\,\right)}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})}\, \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \delta_\alpha^\rho\, \Lambda \sqrt{|g|}\right) = 0 .$$

• De façon analogue à la construction du hamiltonien associé à l'énergie d'une particule (ainsi que pour l'énergie-impulsion du champ électromagnétique à partir du “potentiel” A_α), on peut définir un “tenseur énergie-impulsion” associé au champ : $T_\alpha{}^\rho = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial\left(\Lambda \sqrt{|g|}\right)}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \delta_\alpha^\rho \Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \delta_\alpha^\rho \Lambda$.

On en déduit une contribution à la quadri-impulsion : $P^\alpha = \frac{1}{c} \int T^{\alpha\beta} \sqrt{|g|}\, dS_\beta$.

◊ remarque : par contre (de même que pour le champ électromagnétique), cette méthode donne une expression non symétrique du tenseur énergie-impulsion ; ainsi, on ne peut donc pas en déduire simplement une description du moment cinétique.

🕮 *exercice n° XVI.*

8.5. Constante cosmologique

• On peut proposer d'ajouter à l'action du champ de gravitation un terme de la forme : $\mathcal{S} = \int \Lambda \sqrt{|g|}\, d^4x$ avec une densité lagrangienne $\Lambda(x^\mu)$ scalaire.

Ceci correspond à : $\delta\mathcal{S} = \int \left(-\frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta}\, \Lambda\right) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|}\, d^4x$.

• Si on ajoute un terme $-\frac{1}{2}\Lambda\, g^{\mu\nu}$ au tenseur d'Einstein $G^{\mu\nu}$, compte tenu de $D_\mu G^{\mu\nu} = 0$ et $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$, cela impose de même : $D_\mu(\Lambda\, g^{\mu\nu}) = 0$.

Puisque $D_\mu g^{\mu\nu} = 0$, on aboutit à $\partial_\mu \Lambda = 0$, c'est à dire $\Lambda = Cste$.

Ce terme supplémentaire éventuel est appelé “constante cosmologique” ; son influence a été testée pour proposer des modèles décrivant l'univers.