RG - ANNEXE I

1. Analyse vectorielle dans $\mathbb{R}^3$

• Pour l'analyse vectorielle dans $\mathbb{R}^3$, un grand nombre de relations usuelles peuvent se déduire simplement à l'aide des expressions :

$$\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{k\ell m} = \delta^i_\ell\,\delta^j_m - \delta^i_m\,\delta^j_\ell \quad \text{(qu'on peut noter } \varepsilon^{ij}_{\ell m}\text{)} \;;$$
$$\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{jk\ell} = 2\,\delta^i_\ell \quad ; \quad \varepsilon^{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 6\,.$$

Deux relations sont toutefois moins faciles à déduire :

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}\,) = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\,)\,\vec{B} + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}\,) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\,)\,\vec{A} + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}\,) \;;$$
$$\Delta\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}\,)\,.$$

• Pour les intégrales de surface, on utilise généralement $dS^*_i = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,dS^{jk}$ avec $dS^{jk} = dx^j \wedge dx^k$.

◊ remarque : ceci correspond à utiliser un “vecteur surface” (pour simplifier noté $\overrightarrow{dS}$ et non $\overrightarrow{dS}^*$) orthogonal à l'élément de surface.

• Le théorème d'Ostrogradski décrit alors la correspondance :

◊ la circulation d'un champ vectoriel, le long d'un contour fermé, est égale au flux du rotationnel du champ à travers toute surface bordée par le contour : $dx_i \leftrightarrow \varepsilon_{ijk}\,dS^{*j}\,\partial^k$;

◊ le flux d'un champ vectoriel, à travers une surface fermée, est égal à l'intégrale de la divergence du champ dans le volume bordé par la surface : $dS^*_i \leftrightarrow d\mathcal{V}\,\partial_i$ (où $d\mathcal{V} = d^3\mathcal{V}$ note ici l'élément de volume de $\mathbb{R}^3$).

2. Généralisation dans un 4-espace “quelconque”

• Le déterminant A d'une matrice (tel que $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,A_{\alpha\mu}\,A_{\beta\nu}\,A_{\gamma\rho}\,A_{\delta\sigma} = A\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$) est invariant dans les changements de repère cartésiens. En coordonnées curvilignes par contre, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ et $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ne sont pas des tenseurs ; on se propose de chercher les tenseurs $\mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ et $\mathcal{E}_{\mu\nu\rho\sigma}$ tenant un rôle correspondant.

Partant d'un espace plat où la métrique est $\eta_{\mu\nu}$, on peut effectuer un changement de repère tel que : $x^\beta \to \underline{x}^\alpha$; $d\underline{x}^\alpha = \partial_\beta \underline{x}^\alpha \, dx^\beta$; $dx^\beta = \underline{\partial}_\alpha x^\beta \, d\underline{x}^\alpha$. Alors $A_{\mu\nu}$ se transforme en $\underline{A}_{\mu\nu} = \underline{\partial}_\mu x^\alpha \, \underline{\partial}_\nu x^\beta \, A_{\alpha\beta}$; ainsi A se transforme en $\underline{A} = \frac{A}{J^2}$ où $J = \det\left(\partial_\beta \underline{x}^\alpha\right)$ est le jacobien de la transformation. En particulier la nouvelle métrique $g_{\mu\nu}$ est telle que $g = -\frac{1}{J^2}$; en supposant qu'on se limite à des transformations ne retournant pas l'orientation, on peut écrire $J = \frac{1}{\sqrt{|g|}}$.

De façon analogue $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ et $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ deviennent donc :

$$\mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \partial_\mu \underline{x}^\alpha \, \partial_\nu \underline{x}^\beta \, \partial_\rho \underline{x}^\gamma \, \partial_\sigma \underline{x}^\delta \, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = J \, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \ ;$$

$$\mathcal{E}_{\mu\nu\rho\sigma} = \underline{\partial}_\mu x^\alpha \, \underline{\partial}_\nu x^\beta \, \underline{\partial}_\rho x^\gamma \, \underline{\partial}_\sigma x^\delta \, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{J} \, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{|g|} \, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \ .$$

• Il faut toutefois noter que le comportement n'est pas totalement celui de tenseurs ; ainsi en “abaissant les indices”, on obtient :

$$\eta_{\alpha\mu} \, \eta_{\beta\nu} \, \eta_{\gamma\rho} \, \eta_{\delta\sigma} \, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \ ;$$

$$g_{\alpha\mu} \, g_{\beta\nu} \, g_{\gamma\rho} \, g_{\delta\sigma} \, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\, \mathcal{E}_{\mu\nu\rho\sigma} \ .$$

• D'autre part, l'élément d'intégration $d^4x = dx^0 \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3$ se transforme en $\frac{1}{J} \, d^4\underline{x} = \frac{1}{J} \, d\underline{x}^0 \, d\underline{x}^1 \, d\underline{x}^2 \, d\underline{x}^3$; l'élément d'intégration invariant est donc : $d^4\mathcal{V} = \sqrt{|g|} \, d^4\underline{x}$.

Il est de ce fait aussi plus pratique de remplacer la distribution $\delta^4(X^\alpha)$ par $\tilde{\delta}^4\left(\underline{X}^\alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \, \delta^4\left(\underline{X}^\alpha\right)$ telle que $\tilde{\delta}^4\left(\underline{X}^\alpha\right) d^4\mathcal{V} = \delta^4\left(\underline{X}^\alpha\right) d^4\underline{x}$.

• Si on souhaite séparer l'intégration temporelle, on peut utiliser le temps local $dt_{\ell oc} = \sqrt{g_{00}} \, dt$ et l'intégration spatiale selon $d^3\mathcal{V} = \sqrt{\mathscr{g}} \, d^3\underline{x}$, d'après la métrique spatiale : $d\ell^2 = \mathscr{g}_{ij} \, dx^i \, dx^j$ avec $\mathscr{g}_{ij} = \frac{g_{0i} \, g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}$ telle que $g^{ij} \, \mathscr{g}_{jk} = \delta^i_k$ (donc l'inverse de la partie spatiale $g^{ij} = \mathscr{g}^{ij}$).

Ainsi $d^4\mathcal{V} = c \, dt_{\ell oc} \, d^3\mathcal{V}$; il est alors de même plus pratique de remplacer la distribution $\delta^3(X^i)$ par $\tilde{\delta}^3\left(\underline{X}^i\right) = \frac{1}{\sqrt{\mathscr{g}}} \, \delta^3\left(\underline{X}^i\right)$.

• Les notations de l'analyse vectorielle peuvent se généraliser :

$$\mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathcal{E}_{\delta\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\varepsilon_{\delta\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\rho} \;\;;\;\; \mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathcal{E}_{\gamma\delta\mu\nu} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\varepsilon_{\gamma\delta\mu\nu} = 2\,\varepsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \;\;;$$

$$\mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathcal{E}_{\beta\gamma\delta\mu} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\varepsilon_{\beta\gamma\delta\mu} = 6\,\delta^{\alpha}_{\mu} \;\;;\;\; \mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = 24\,.$$

• Pour les intégrales de surface, on utilise généralement $dS^*_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\,dS^{\mu\nu}$ avec $dS^{\mu\nu} = dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$; la quantité invariante est $\sqrt{\mathscr{g}}\,dS^*_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\mathcal{E}_{\alpha\beta\mu\nu}\,dS^{\mu\nu}$.

◊ remarque : dans $\mathbb{R}^4$ on ne peut pas omettre le symbole “dual” $\square^*$.

• Le théorème d'Ostrogradski décrit alors par exemple la correspondance :

◊ la circulation d'un champ vectoriel, le long d'un contour fermé, est égale au flux du rotationnel du champ à travers toute surface bordée par le contour : $dx^{\alpha} \leftrightarrow \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta}\,dS^*_{\mu\nu}\,\partial_{\beta} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\alpha\beta}_{\rho\sigma}\,dS^{\rho\sigma}\,\partial_{\beta}$.