RG - ANNEXE III

1. Groupe des isométries

• Dans un changement de coordonnées $x^\mu \to \underline{x}^\mu$, la métrique se transforme selon :

$$g_{\alpha\beta}(x^\mu) \to \underline{g}_{\alpha\beta}(\underline{x}^\mu) = \underline{\partial}_\alpha x^\rho \ \underline{\partial}_\beta x^\sigma \ g_{\rho\sigma}(x^\mu) \ ;$$
$$g_{\alpha\beta}(x^\mu) = \partial_\alpha \underline{x}^\rho \ \partial_\beta \underline{x}^\sigma \ \underline{g}_{\rho\sigma}(\underline{x}^\mu) \ .$$

Une isométrie est une transformation qui laisse invariante l'expression de la métrique : $\underline{g}_{\rho\sigma}(\underline{x}^\mu) = g_{\rho\sigma}(\underline{x}^\mu)$. Dans ce cas : $g_{\alpha\beta}(x^\mu) = \partial_\alpha \underline{x}^\rho \ \partial_\beta \underline{x}^\sigma \ g_{\rho\sigma}(\underline{x}^\mu)$.

• On peut simplifier les raisonnements en étudiant les générateurs infinitésimaux du groupe des isométries, c'est-à-dire des transformations particulières de la forme infinitésimale : $\underline{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon \ \xi^\mu(x^\nu)$ avec $|\varepsilon| \ll 1$.

À l'ordre le plus bas, la condition d'isométrie peut s'écrire :

$$g_{\alpha\beta}(x^\mu) = \left[\delta_\alpha^\rho + \varepsilon \ \partial_\alpha \xi^\rho(x^\mu)\right] \left[\delta_\beta^\sigma + \varepsilon \ \partial_\beta \xi^\sigma(x^\mu)\right] g_{\rho\sigma}(\underline{x}^\mu) \ ;$$
$$g_{\alpha\beta}(x^\mu) \approx \varepsilon \ \partial_\alpha \xi^\rho(x^\mu) \ \delta_\beta^\sigma \ g_{\rho\sigma}(x^\mu) + \delta_\alpha^\rho \ \varepsilon \ \partial_\beta \xi^\sigma(x^\mu) \ g_{\rho\sigma}(x^\mu) \ \cdots$$
$$\cdots + \delta_\alpha^\rho \ \delta_\beta^\sigma \ . \left[g_{\rho\sigma}(x^\mu) + \partial_\kappa g_{\rho\sigma}(x^\mu) \ \varepsilon \ \xi^\kappa(x^\mu)\right] \ .$$

En simplifiant (tout est calculé en x^μ) : $\partial_\alpha \xi^\rho \ g_{\rho\beta} + \partial_\beta \xi^\sigma \ g_{\alpha\sigma} + \partial_\kappa g_{\alpha\beta} \ \xi^\kappa \approx 0$.

Ceci peut être écrit avec les dérivées covariantes :

$$\left(D_\alpha \xi^\rho - \Gamma^\rho{}_{\gamma\alpha} \ \xi^\gamma\right) g_{\rho\beta} + \left(D_\beta \xi^\sigma - \Gamma^\sigma{}_{\gamma\beta} \ \xi^\gamma\right) g_{\alpha\sigma} + \partial_\kappa g_{\alpha\beta} \ \xi^\kappa \approx 0 \ ;$$
$$D_\alpha \xi^\rho \ g_{\rho\beta} + D_\beta \xi^\sigma \ g_{\alpha\sigma} + \left(\partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \Gamma^\rho{}_{\gamma\alpha} \ g_{\rho\beta} - \Gamma^\sigma{}_{\gamma\beta} \ g_{\alpha\sigma}\right) \xi^\gamma \approx 0 \ ;$$
$$D_\alpha \xi_\beta + D_\beta \xi_\alpha + D_\gamma g_{\alpha\beta} \ \xi^\gamma \approx 0 \ .$$

Or $D_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$; la condition d'isométrie est donc : $D_\alpha \xi_\beta + D_\beta \xi_\alpha = 0$.

2. Dérivée de Lie

• La dérivée de Lie d'une quantité $f(\overleftrightarrow{M})$ dépendant de la position (ou de même pour f^α...) dans la direction d'un vecteur $\overleftrightarrow{\xi}$ peut être définie comme la limite :

$$\mathcal{L}_{\overleftrightarrow{\xi}} f = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(\overleftrightarrow{M} + \varepsilon\, \overleftrightarrow{\xi}\right) - f\left(\overleftrightarrow{M}\right)}{\varepsilon} \;.$$

On peut alors écrire :

$$\mathcal{L}_{\overleftrightarrow{\xi}} f = \xi^1 \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x^1 + \varepsilon\, \xi^1, x^2, \cdots) - f(x^1, x^2, \cdots)}{\varepsilon\, \xi^1} \cdots$$

$$\cdots + \xi^2 \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x^1, x^2 + \varepsilon\, \xi^2, \cdots) - f(x^1, x^2, \cdots)}{\varepsilon\, \xi^2} + \cdots \;;$$

$$\mathcal{L}_{\overleftrightarrow{\xi}} f = \xi^\mu\, \partial_\mu f\left(\overleftrightarrow{M}\right) .$$

◊ remarque : les vecteurs de base “naturels” en géométrie riemannienne correspondent à : $\overleftrightarrow{e}_\alpha = \partial_\alpha \overleftrightarrow{M}$; ceci est analogue à une dérivée de Lie de M^μ dans la direction d'un vecteur $\overleftrightarrow{\xi}_{(\alpha)}$ de coordonnées $\xi_{(\alpha)}^{\ \mu} = \delta_\alpha^\mu$.

3. Vecteur de Killing

• On nomme “vecteur de Killing” un vecteur $\overleftrightarrow{\xi}$ tel que la dérivée de Lie de la métrique dans sa direction soit nulle : $\mathcal{L}_{\overleftrightarrow{\xi}}\, g_{\mu\nu} = 0$.

Dans la mesure où cela revient à dire que la métrique est invariante dans une transformation infinitésimale selon $\overleftrightarrow{\xi}$, on peut aussi le traduire par “l'équation de Killing” : $D_\alpha \xi_\beta + D_\beta \xi_\alpha = 0$.

• En particulier tout vecteur de Killing a une divergence nulle :

$$D_\alpha \xi^\alpha = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta} . \left(D_\alpha \xi_\beta + D_\beta \xi_\alpha\right) = 0 \;.$$

• Compte tenu de la non commutation des dérivées de tout vecteur, les vecteurs de Killing vérifient : $D_\mu D_\nu \xi_\beta - D_\nu D_\mu \xi_\beta = -R^\lambda{}_{\beta\mu\nu}\, \xi_\lambda$.

Mais d'après l'identité de Bianchi : $R^\lambda{}_{\beta\mu\nu} + R^\lambda{}_{\mu\nu\beta} + R^\lambda{}_{\nu\beta\mu} = 0$; ainsi avec la relation de Killing :

$$\left(D_\mu D_\nu \xi_\beta - D_\nu D_\mu \xi_\beta\right) + \left(D_\nu D_\beta \xi_\mu - D_\beta D_\nu \xi_\mu\right) + \left(D_\beta D_\mu \xi_\nu - D_\mu D_\beta \xi_\nu\right) = 0 \;;$$

$$D_\mu\left(D_\nu \xi_\beta - D_\beta \xi_\nu\right) + D_\nu\left(D_\beta \xi_\mu - D_\mu \xi_\beta\right) + D_\beta\left(D_\mu \xi_\nu - D_\nu \xi_\mu\right) = 0 \;;$$

$$D_\mu D_\nu \xi_\beta - D_\nu D_\mu \xi_\beta = -D_\beta D_\mu \xi_\nu \;.$$

On obtient donc finalement : $D_\beta D_\mu \xi_\nu = R^\lambda{}_{\beta\mu\nu}\, \xi_\lambda$.

• Cette équation montre que si on connait un vecteur de Killing et ses dérivées premières en un point, on peut (en principe) le calculer partout par intégration.

Avec le d'alembertien $\square = g^{\beta\mu}\, D_\beta D_\mu$ on peut aussi en déduire une forme plus simple : $\square\, \xi_\nu = -R^\lambda{}_\nu\, \xi_\lambda$.

4. Constantes du mouvement

• En notant $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ le vecteur tangent à une géodésique, cette dernière est caractérisée par l'invariance : $\frac{Du^\alpha}{ds} = u^\beta\, D_\beta u^\alpha = 0$.

• À tout vecteur de Killing ξ_μ correspond une constante du mouvement $u^\alpha\, \xi_\alpha$.

Compte tenu de l'antisymétrie de $D_\beta \xi_\alpha$ on peut en effet écrire :

$$\frac{D(u^\alpha\, \xi_\alpha)}{ds} = u^\beta\, D_\beta(u^\alpha\, \xi_\alpha) = u^\beta\, u^\alpha\, D_\beta \xi_\alpha + \xi_\alpha\, u^\beta\, D_\beta u^\alpha = 0 .$$

◊ remarque : ceci suppose que le mouvement suit une géodésique, donc concerne une particule libre (en présence d'effets électromagnétiques, il faudrait étudier de même les transformations laissant invariant le 4-potentiel A^μ).

• Dans le cas d'une particule massive libre, cela n'est pas indépendant du théorème de Nœther : « à toute transformation infinitésimale qui laisse invariante l'intégrale d'action correspond une grandeur qui se conserve ».

En effet l'action s'écrit dans ce cas : $\mathcal{S} = -m\, c \int ds$, donc son invariance est conséquence de celle de la métrique.