RG - ANNEXE IV

1. Notion de tétrade

• En géométrie riemannienne, on peut utiliser la “tétrade” des vecteurs de base “naturels” de l'espace tangent, correspondant à :

$$\vec{e}_\alpha = \partial_\alpha \overrightarrow{M} \;\; ; \;\; g_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta \; .$$

On peut aussi préférer des vecteurs unitaires : $\vec{u}_\alpha = \frac{\vec{e}_\alpha}{\sqrt{|g_{\alpha\alpha}|}}$. Si la métrique est diagonale, cela constitue une tétrade orthonormée et permet de se ramener à la métrique $\eta_{\alpha\beta}$.

Mais dans le cas général, si la métrique n'est pas diagonale, de telles tétrades ne sont pas orthogonales.

• Un observateur peut souhaiter utiliser en son voisinage une base $\vec{v}_\alpha$ orthonormée de son choix. En particulier, avec une base correspondant à un référentiel d'inertie, l'avantage est que la métrique peut se ramener à $\eta_{\alpha\beta}$ (même si $g_{\alpha\beta}$ est au départ non diagonale).

On se limite dans la suite à des tétrades orthogonales ; il est possible de généraliser mais les expressions qui en résultent sont moins simples.

• Pour exprimer les calculs, on peut repérer les vecteurs de base choisis par leurs coordonnées dans la base “naturelle”. Afin de ne pas confondre les indices numérotant la base avec ceux de leurs coordonnées, on note généralement les premiers entre parenthèses : $[\vec{v}_\alpha]^\mu = v_{(\alpha)}^{\;\mu}$; $v_{(\alpha)\mu} = g_{\mu\nu}\, v_{(\alpha)}^{\;\nu}$.

Une base orthonormée correspond à : $\vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\beta = v_{(\alpha)}^{\;\mu}\, v_{(\beta)\mu} = \eta_{\alpha\beta}$.

• Sur une telle base, un vecteur peut s'écrire : $\vec{A} = A^\mu\, \vec{e}_\mu = A^{(\alpha)}\, \vec{v}_\alpha$; ainsi : $A^\mu = A^{(\alpha)}\, v_{(\alpha)}^{\;\mu}$.

Dans un changement des coordonnées x^μ , les coordonnées $A^{(\alpha)}$ se comportent comme des scalaires : puisqu'ils sont choisis par l'observateur (et non déduits du système de coordonnées) les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{v}_\alpha$ sont invariants ; les coordonnées $v_{(\alpha)}^{\;\mu}$ se transforment comme A^μ et les $A^{(\alpha)}$ sont inchangés.

• Pour décrire les formes linéaires sur l'espace tangent (espace dual de l'espace tangent), on peut aussi définir une base de covecteurs $\overleftrightarrow{v^\alpha}^*$ reliés aux vecteurs de base : $v^{(\alpha)}_{\ \mu} = \eta^{\alpha\beta}\, v_{(\beta)\mu}$.

Ainsi : $$\overleftarrow{v}^\alpha \cdot \vec{v}_\beta = v^{(\alpha)}_{\ \mu}\, v^{\ \mu}_{(\beta)} = \eta^{\alpha\rho}\, v_{(\rho)\mu}\, v^{\ \mu}_{(\beta)} = \eta^{\alpha\rho}\, \eta_{\rho\beta} = \delta^\alpha_\beta \ ;$$
$$A_\mu = g_{\mu\nu}\, A^\nu = A^{(\alpha)}\, v_{(\alpha)\mu} = \eta_{\alpha\beta}\, A^{(\alpha)}\, v^{(\beta)}_{\ \mu} = A_{(\alpha)}\, v^{(\alpha)}_{\ \mu} \ .$$

◊ remarque : on peut aussi considérer en tant que forme linéaire :
$$\left\langle \overleftarrow{v}^\alpha \middle| \vec{A} \right\rangle = A^{(\alpha)} \ ; \ \overleftarrow{v}^\alpha \cdot \vec{v}_\beta = \left\langle \overleftarrow{v}^\alpha \middle| \vec{v}_\beta \right\rangle = v^{(\alpha)}_{(\beta)} = \delta^\alpha_\beta \ .$$

◊ remarque : l'espace tangent étant le dual de son dual :
$$\left\langle \vec{v}_\beta \middle| \overleftarrow{\omega} \right\rangle = \omega_{(\beta)} \ ; \ \vec{v}_\beta \cdot \overleftarrow{v}^\alpha = \left\langle \vec{v}_\beta \middle| \overleftarrow{v}^\alpha \right\rangle = v^{(\alpha)}_{\ (\beta)} = \delta^\alpha_\beta \ .$$

• On peut par ailleurs considérer :
$$d\overrightarrow{M} = dx^\mu\, \vec{e}_\mu = dx^{(\alpha)}\, \vec{v}_\alpha \ ; \ \ dx^\mu = dx^{(\alpha)}\, v^{\ \mu}_{(\alpha)} \ ; \ \ dx^{(\beta)} = v^{(\beta)}_{\ \mu}\, dx^\mu \ .$$

Il faut toutefois bien noter que les formes différentielles $dx^{(\alpha)}$ ne sont généralement pas des différentielles totales : sauf cas particuliers, il n'existe pas de primitive $x^{(\alpha)}$ désignant une coordonnée correspondante.

• Ceci permet d'écrire :
$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = v^{\ \mu}_{(\alpha)}\, v_{(\beta)\mu}\, dx^{(\alpha)}\, dx^{(\beta)} = \eta_{\alpha\beta}\, dx^{(\alpha)}\, dx^{(\beta)} \ ;$$
$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^{(\alpha)}\, dx^{(\beta)} = v^{(\alpha)}_{\ \mu}\, v_{(\alpha)\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \ ;$$
$$g_{\mu\nu}\, v^{\ \mu}_{(\alpha)}\, v^{\ \nu}_{(\beta)} = \eta_{\alpha\beta} \ ; \ \eta_{\alpha\beta}\, v^{(\alpha)}_{\ \mu}\, v^{(\beta)}_{\ \nu} = g_{\mu\nu} \ ; \ v^{(\alpha)}_{\ \mu}\, v^{\ \nu}_{(\alpha)} = \delta^\mu_\nu \ .$$

2. Dérivées par rapport au repérage des tétrades

• On peut définir une dérivation d'une fonction scalaire φ dans la direction de $\vec{v}_\alpha$ (comme pour tout autre vecteur) : $\partial_{(\alpha)}\varphi = v^{\ \mu}_{(\alpha)}\, \partial_\mu\varphi$.

◊ remarque : une telle dérivée se réfère à la variation de φ associée à une variation $dx^{(\alpha)}$, ce qui ne nécessite pas l'existence d'un primitive $x^{(\alpha)}$; par contre, il apparaît ici qu'on se ramène à des dérivées $\partial_\mu\varphi$, on se limite donc à réécrire en fonction des tétrades une quantité calculée à partir des coordonnées “classiques”.

• Inversement (en multipliant par $\upsilon^{(\alpha)}_{\ \nu}$) on obtient : $\partial_\nu \varphi = \upsilon^{(\alpha)}_{\ \nu}\ \partial_{(\alpha)}\varphi$.

• La situation se complique si on veut définir une dérivation des vecteurs, car cela fait forcément intervenir les dérivées des $\vec{\upsilon}_\alpha$ (de façon analogue au rôle des dérivées de la métrique dans les $\Gamma_{\mu\nu\rho}$ pour les coordonnées “classiques”).

Dans le cas général, si on suppose que les tétrades peuvent être définies de façon complètement indépendante par les observateurs situés aux différents points de l'espace, cela revient à devoir appliquer en plus en chaque point un changement de tétrade par transformation de Lorentz.

• Si on suppose que les tétrades sont définies de façon cohérente aux différents points de l'espace, par des expressions $\vec{\upsilon}_\alpha(x^\mu)$, alors on peut les dériver (mais les notations basées sur ces tétrades ne sont qu'une façon de ré-exprimer autrement les calculs “classiques”). Ces calculs passent par l'intermédiaire des coefficients : $\gamma_{(\alpha\beta\varepsilon)} = D_\mu \upsilon_{(\alpha)\nu}\ \upsilon_{(\beta)}^{\ \mu}\ \upsilon_{(\varepsilon)}^{\ \nu}$.

◊ remarque : dans la mesure où $x^{(\beta)}$ n'existe pas, on ne peut évidemment pas définir des expressions du type $\vec{\upsilon}_\alpha\left(x^{(\beta)}\right)$.

• Puisque le passage au repérage par rapport aux tétrades correspond alors à une transformation de Lorentz dépendant du point, il est utile (et possible) de définir une dérivation qui “prend en compte” de telles transformations (S. Weinberg).

Ainsi, pour prendre en compte la gravitation relativiste en mécanique quantique, on peut utiliser les équations valables en relativité restreinte (donc aussi dans un référentiel d'inertie) en y remplaçant les dérivations $\partial_{(\alpha)}$ par : $\mathcal{D}_{(\alpha)} = \upsilon_{(\alpha)}^{\ \mu}\ \partial_\mu + \frac{1}{2}\ \gamma_{(\alpha\varepsilon\kappa)}\ \sigma^{(\varepsilon\kappa)}$, où les matrices $\sigma^{(\varepsilon\kappa)}$ sont celles associées à la représentation des transformations de Lorentz infinitésimales.

◊ remarque : les $\sigma^{(\varepsilon\kappa)}$ (antisymétriques) sont assez généralement utilisées par la mécanique quantique, en particulier dans la mesure où il faut alors des représentations applicables aux spineurs.