

## RG VIII - MÉTRIQUE DE LEMAÎTRE - GÉNÉRALISATIONS

### 1. Généralisation pour l'espace en contraction

#### 1.1. Formulation du problème

• Pour une particule en chute libre verticale, à partir d'une vitesse  $v_0$  en  $r = r_0$  (notations "classiques" de Schwarzschild), la vitesse algébrique peut s'écrire :

$$v = -c \sqrt{1 - \frac{A \cdot (1 - \beta_0^2)}{A_0}} \quad \text{avec } A_0 = A(r_0) .$$

Si le mobile part de l'infini avec une vitesse (limite) nulle, alors  $A_0 = 1$  et  $\beta_0 = 0$  donc  $v = -c \sqrt{\frac{r_s}{r}}$ . C'est à cette vitesse particulière que correspond la simplification de Lemaître.

• Pour une chute libre radiale quelconque, la transformation de Lemaître "brute" avec la vitesse correspondante ( $f = -\beta_e \neq \sqrt{\frac{r_s}{r}}$ ) semble a priori ne pas simplifier la singularité. Autrement dit : une telle particule semblerait ne pas rencontrer de singularité avec la métrique de Lemaître, mais en rencontrer une dans son "référentiel propre". Il faut préciser la généralisation.

#### 1.2. Transformation de Lemaître généralisée

• Pour  $v_e = -c \sqrt{1 - \frac{A}{\alpha}}$ , avec  $\alpha = \frac{A_0}{1 - \beta_0^2}$ , la transformation de Lemaître peut suggérer une généralisation en posant :  $f = \frac{1}{\kappa} = \frac{\sqrt{\alpha - A}}{\sqrt{\alpha}}$ , avec ici encore :

$$d\underline{R} = c \, dt + \kappa(r) \frac{dr}{A} ; \quad c \, d\underline{T} = c \, dt + f(r) \frac{dr}{A} .$$

Pour  $\kappa(r) > 0$ , ce repérage est ici encore en mouvement centripète à la vitesse d'entraînement :  $v_e = \frac{d\ell}{dt_{loc}} = \frac{\sqrt{c} \, dr}{\sqrt{A} \, dt} = -\frac{c}{\kappa}$ .

• Par ailleurs, la simplification de la métrique ne nécessite pas  $f = \sqrt{\frac{r_s}{r}}$  mais plus généralement  $1 - f^2 = \Phi A$  où  $\Phi$  est une expression sans singularité. Ceci correspond à  $f = \pm \sqrt{1 - \Phi A}$  ; or  $f = \sqrt{1 - \frac{A}{\alpha}}$  est une expression de cette forme, donc elle simplifie la métrique.

• Le seul “inconvenient” est qu'on obtient ainsi :  $ds^2 = \alpha \cdot [c^2 dT^2 - f^2 dR^2]$  .

On préfère donc poser dans ce cas :  $ds^2 = c^2 dT^2 - f^2 dR^2$  , avec :

$$dR = \sqrt{\alpha} \left[ c dt + \kappa(r) \frac{dr}{A} \right] ; c dT = \sqrt{\alpha} \left[ c dt + f(r) \frac{dr}{A} \right] .$$

 *exercices n° I et II.*

### 1.3. Expressions des coordonnées

• On obtient en simplifiant :  $dR - c dT = \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_s}{r} + \alpha - 1}}$  . Le cas général est compliqué ; on préfère ici deux cas simples caractéristiques.

• Pour  $\alpha = 2 > 1$  , c'est le cas d'une particule partant de l'infini ( $A_0 = 1$ ) avec une vitesse initiale  $\beta_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$  ; l'intégration donne (avec une constante d'intégration nulle fixant l'origine) :  $R - c T = \sqrt{r \cdot (r + r_s)} - r_s \operatorname{arsinh} \left( \sqrt{\frac{r}{r_s}} \right)$  .

Cette fonction est strictement croissante, mais non inversible littéralement pour exprimer la partie angulaire de la métrique.

• Pour  $\alpha = 0,5 < 1$  , c'est le cas d'une particule partant avec une vitesse initiale nulle à une distance finie  $r_0 = 2 r_s$  ( $A_0 = 0,5 < 1$ ) , l'intégration donne (en choisissant la constante d'intégration pour ajuster l'origine) :

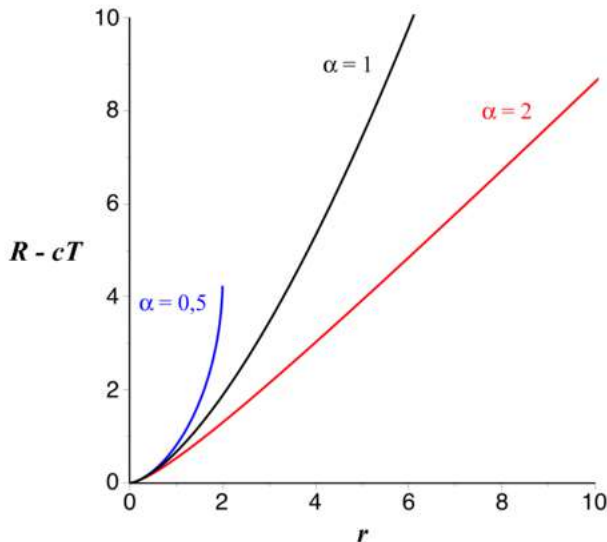
$$R - c T = 2 r_s \sqrt{2} \arcsin \left( \sqrt{\frac{r}{2 r_s}} \right) - \sqrt{2 r \cdot (2 r_s - r)} .$$

Cette fonction est strictement croissante (restreinte à  $r \leq r_0 = 2 r_s$ ) , mais non inversible littéralement pour exprimer la partie angulaire de la métrique.

Ce résultat est limité à  $r \leq r_0$  car la méthode de Lemaître considère  $v_e$  en fonction de  $r$  avec une particule partant de  $r_0$  (elle ne peut servir de référence que là où elle passe). Cela n'interdit pas de décrire les mouvements à d'autres vitesses, mais sans accéder à la zone  $r > r_0$  (à moins d'utiliser des nombres complexes ?) ; en particulier, pour le cône de lumière à l'instant "initial", on ne peut pas tracer la trajectoire du photon sortant vers  $r > r_0$ .

♦ remarque : si  $r > r_0$  on obtient  $ds^2 = c^2 dT^2 - f^2 dR^2$  où  $f^2 = 1 - \frac{A}{\alpha} < 0$ , donc la variable  $R$  n'est plus du genre espace ; c'est comme pour les coordonnées "classiques" de Schwarzschild : là où il n'y a plus de particules de référence du type choisi (statiques pour ce dernier, impossible pour  $r < r_s$ ).

♦ remarque : en revanche, contrairement à celle de Schwarzschild, cette limite ressemble plus à une sorte d'horizon, qui s'éloigne quand on s'en "approche" (ici dans l'espace des vitesses) ; pour des particules montant à plus grande vitesse, dépassant  $r_0$  à vitesse non nulle pour aller jusqu'à  $r_1 > r_0$ , alors la limite "recule" en  $r_1$  ; au contraire l'horizon de Schwarzschild reste au même endroit quelle que soit la vitesse subluminaire à laquelle il est atteint, mais il disparaît complètement si et seulement s'il est atteint à la vitesse  $c$ , quelle que soit la façon dont cette vitesse est approchée.



• On peut comparer l'allure des variations dans les différents cas (le graphique prend  $r_s$  comme unité) :

- ◊ elliptique pour  $\alpha < 1$  (tangente verticale en  $r = 2 r_s$  pour  $\alpha = 0,5$ ) ;
- ◊ parabolique pour  $\alpha = 1$  ;
- ◊ hyperbolique pour  $\alpha > 1$  .

• On obtient par ailleurs en simplifiant :

$$c \, dT - \sqrt{\alpha} \, c \, dt = \sqrt{\alpha - A} \, \frac{dr}{A} = \sqrt{\frac{\frac{r_s}{r} + \alpha - 1}{1 - \frac{r_s}{r}}} \, dr .$$

Pour  $\alpha = 2$  l'intégration donne :

$$c \, T - \sqrt{2} \, c \, t = \sqrt{r \cdot (r + 1)} + 3 \operatorname{arsinh}(\sqrt{r}) - \sqrt{2} \operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{r}+1}{|\sqrt{r}-1|}\right) - \sqrt{2} \operatorname{arsinh}\left(\frac{\sqrt{r}-1}{|\sqrt{r}+1|}\right) .$$

Pour  $\alpha = 0,5$  l'intégration donne :

$$c \, T - \frac{1}{\sqrt{2}} \, c \, t = \frac{\sqrt{r \cdot (2-r)}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{|r-1|}\right) .$$

◊ remarque : la constante imaginaire de  $c \, t$  se simplifie en général si on tient compte dans  $\mathbb{C}$  du comportement de  $|\sqrt{r} + 1|$  ou  $|r - 1|$  : les limites à l'infini des fonctions  $\operatorname{arcosh}$  et  $\operatorname{arsinh}$  se comportent comme un logarithme (dans ce cas  $c \, T$  n'a pas de composante imaginaire).

• De façon générale, ces résultats à la fois renforcent et affaiblissent la crédibilité de l'interprétation simpliste de la métrique de Lemaître selon laquelle l'espace serait en contraction.

Cela la renforce en montrant que ce qui est obtenu avec la forme classique, pour une vitesse particulière, est en fait tout aussi vrai pour n'importe quelle vitesse de chute libre radiale. En ce sens, il semble ne pas s'agir d'un artifice de calcul lié à une simplification fortuite.

Mais cela l'affaiblit en montrant qu'il est faux de croire que l'effet est lié à un mouvement d'effondrement de l'espace : ce dernier n'est associé à aucune vitesse de chute particulière.

◊ remarque : c'est différent pour la métrique de Kerr décrivant un trou noir en rotation ; dans ce cas l'étude de l'ergosphère, ou de la chute libre avec vitesse initiale nulle, montre que l'espace physique est entraîné en rotation.

 *exercices n° III, IV, V, VI et VII.*

#### 1.4. Représentations graphiques

- Pour  $\alpha = 2$  avec  $r_s$  comme unité, les courbes correspondant à  $r = Cste$  sont ici encore des droites :  $R - cT = \sqrt{r \cdot (r + 1)} - \operatorname{arsinh}(\sqrt{r})$ .

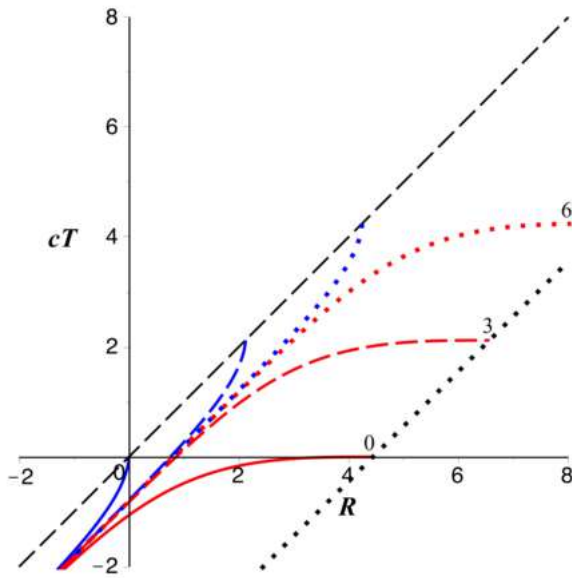
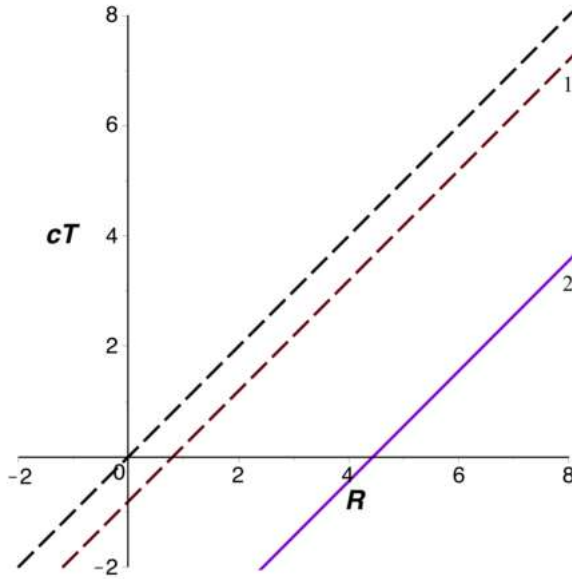
L'allure (non représentée ici) est la même que pour  $\alpha = 1$ , mais avec des droites plus rapprochées.

- Les courbes correspondant à  $ct = Cste$  peuvent être décrites par une représentation paramétrique (en fonction de  $r$ ) selon les expressions précédentes pour  $R - cT$  et  $cT$ . L'allure (non représentée ici) est la même que pour  $\alpha = 1$ .

- Pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  avec  $r_s$  comme unité, les courbes correspondant à  $r = Cste$  sont ici encore des droites :  $R - cT = 2\sqrt{2} \operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right) - \sqrt{2r \cdot (2 - r)}$ .

On obtient la représentation ci-après (ici pour  $r = 0 ; 1 ; 2$ ) ; la partie à gauche de la diagonale n'a pas de signification physique. L'allure est la même que pour  $\alpha = 1$ , mais avec des droites plus espacées et limitées à  $r \leq 2$ .

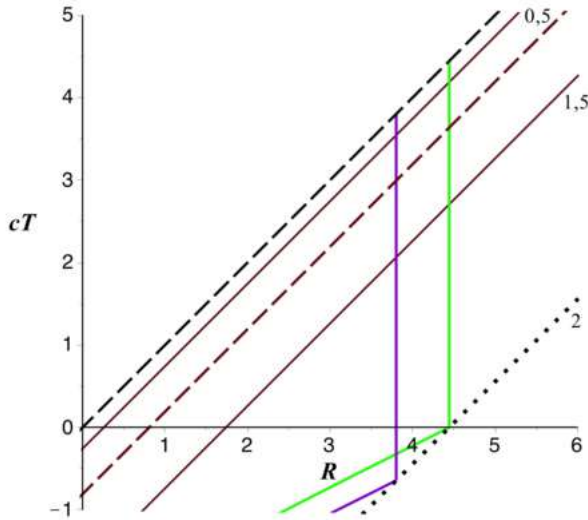
- Les courbes correspondant à  $ct = Cste$  peuvent être décrites par une représentation paramétrique (en fonction de  $r$ ) selon les expressions précédentes pour  $R - cT$  et  $cT$ . L'allure (ici pour  $ct = 0 ; 3 ; 6$ ) est la même que pour  $\alpha = 1$ , mais avec une limite en  $r = r_0$ .



### 1.5. Trajectoires de particules

• On s'intéresse ici au cas  $\alpha < 1$ , pour lequel existe le problème des particules qui montent jusqu'à  $r = r_0$  puis redescendent. On choisit comme exemple  $\alpha = 0,5$ .

Toutes les trajectoires comobiles avec  $R = Cste$  décrivent des mouvements identiques décalés dans le temps. En choisissant de représenter celle qui démarre en  $r = r_0$  à  $T = 0$  (particule de référence, ci-après en vert), on impose d'après ce qui précède :  $R = 2 r_s \sqrt{2} \arcsin(1) \approx 4,44 r_s$ . Les autres trajectoires analogues correspondent à des particules qui partent avant (un exemple est représenté en violet) ou après.



• Mais se limiter à cela serait omettre une partie importante du tracé. La trajectoire d'une particule dont la chute est en comouvement dans la partie  $R = Cste$  ne se limite pas à cette partie : l'ascension qui précède y est également représentée (avec  $R$  non constant).

Pour une particule montante :  $v = c \sqrt{1 - \frac{A}{\alpha}} = \frac{d\ell}{dt_{loc}} = \frac{dr}{A dt}$ .

Ainsi (avec  $r_s$  comme unité) :  $c dt = \frac{\sqrt{\alpha} dr}{A \sqrt{\alpha - A}} = \frac{\sqrt{\alpha} r^2 dr}{(r-1) \sqrt{r \cdot (1 - (1-\alpha) r)}}$ .

Avec  $\alpha = 0,5$  l'intégration donne (pour la particule de référence) :

$$c t = -\sqrt{r \cdot (2 - r)} - 2 \arccos(r - 1) - \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{|r-1|}\right).$$

On en déduit :


$$c T = -\sqrt{2} \left[ \arccos(r - 1) + \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{|r-1|}\right) \right] ;$$

$$R = -\sqrt{2} \left[ \arccos(r - 1) + \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{|r-1|}\right) - 2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right) + \sqrt{r \cdot (2 - r)} \right].$$

Ces relations donnent une représentation paramétrique de la partie montante de la trajectoire, reportée sur la figure précédente.

♦ remarque : les points anguleux des trajectoires, au niveau du raccordement à la limite  $r = r_0$ , sont liés au fait que la métrique y est singulière.

♦ remarque : on peut vérifier que la vitesse opposée redonne  $dR = 0$  pour la partie descendante.

 *exercices n° IX, X et XI.*

## 2. Généralisation pour l'expansion

### 2.1. Expressions des coordonnées

• On s'intéresse ici au cas  $\alpha < 1$ , qui contribue à décrire le référentiel d'une particule qui monte jusqu'à s'immobiliser en  $r = r_0$ , avant de retomber.

• On obtient dans ce cas :  $dR + c dT = \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_s}{r} + \alpha - 1}}$ .

Pour  $\alpha = 0,5 < 1$ , l'intégration donne (en choisissant la constante d'intégration nulle) :

$$R + c T = 2 r_s \sqrt{2} \arcsin\left(\sqrt{\frac{r}{2 r_s}}\right) - \sqrt{2 r \cdot (2 r_s - r)}.$$



• On obtient par ailleurs en simplifiant :

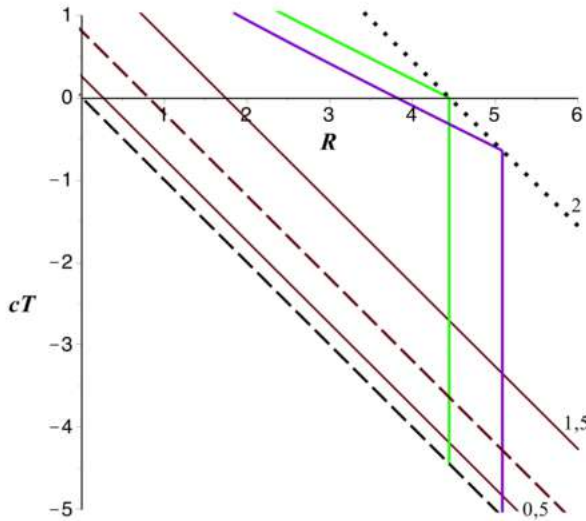
$$c \, dT - \sqrt{\alpha} \, c \, dt = -\sqrt{\alpha - A} \frac{dr}{A} = -\frac{\sqrt{\frac{r_s}{r} + \alpha - 1}}{1 - \frac{r_s}{r}} dr .$$

Pour  $\alpha = 0,5$  l'intégration donne (avec  $r_s$  comme unité) :

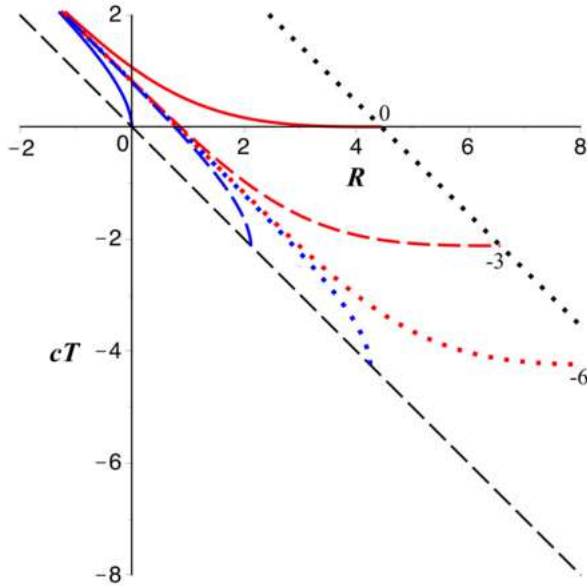
$$c \, T - \frac{1}{\sqrt{2}} \, c \, t = -\frac{\sqrt{r \cdot (2-r)}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcosh} \left( \frac{1}{|r-1|} \right) .$$

## 2.2. Représentation graphique

Le diagramme de Lemaître représentant  $r = Cste$  est analogue au précédent, avec symétrie de  $T$  en  $-T$  (mais les trajectoires des particules ne sont pas tout à fait symétriques).



La représentation de  $c \, t = Cste$  est de même analogue.



### 2.3. Trajectoires de particules

• Ici de même, la trajectoire d'une particule dont la montée est en comouvement avec  $R = Cste$  ne se limite pas à cette partie : la chute qui suit est également représentée (avec  $R$  non constant) sur la figure correspondante.

Pour une particule descendante :  $v = -c \sqrt{1 - \frac{A}{\alpha}} = \frac{dr}{A dt}$ .

Ainsi (avec  $r_s$  comme unité) :  $c dt = -\frac{\sqrt{\alpha} dr}{A \sqrt{\alpha - A}} = -\frac{\sqrt{\alpha} r^2 dr}{(r-1) \sqrt{r \cdot (1 - (1-\alpha) r)}}$ .

Avec  $\alpha = 0,5$  l'intégration donne (pour la particule de référence) :

$$c t = \sqrt{r \cdot (2 - r)} + 2 \arccos(r - 1) + \operatorname{arcosh} \left( \frac{1}{|r-1|} \right).$$

On en déduit (l'expression de  $R$  est la même que dans le cas en contraction) :

$$c T = \sqrt{2} \left[ \arccos(r - 1) + \operatorname{arcosh} \left( \frac{1}{|r-1|} \right) \right] ;$$

$$R = -\sqrt{2} \left[ \arccos(r - 1) + \operatorname{arcosh} \left( \frac{1}{|r-1|} \right) - 2 \arcsin \left( \sqrt{\frac{r}{2}} \right) + \sqrt{r \cdot (2 - r)} \right] .$$

Ces relations donnent une représentation paramétrique de la partie descendante de la trajectoire.

### 3. Combinaison de l'expansion suivie de la contraction

- Pour construire un référentiel comobile avec une particule en mouvement radial libre, ascendant jusqu'en  $r = r_0$  puis redescendant, il pourrait sembler logique que le plus simple soit de raccorder les deux cas précédents.

Cela est toutefois impossible car la transformation de Lorentz locale ne donne pas des différentielles exactes ; la relation de Lemaître doit multiplier par un facteur intégrant approprié, or les variables  $R$  et  $T$  déduites des intégrations respectives pour la montée et la descente ont des conventions de signes incompatibles.

Si le référentiel en contraction a une vitesse d'entraînement ne dépendant que de  $r$ , il est comobile avec toutes les particules qui descendent de la même façon, indépendamment de l'instant auquel elles passent en une valeur particulière de  $r$  ; il ne peut donc pas en même temps être comobile avec les particules qui passent en montant en cette même valeur de  $r$ .

♦ remarque : pour obtenir des coordonnées compatibles, il faut que l'expansion et la contraction dépendent du temps, conduisant à un repérage comme celui de Novikov (ou de Kruskal-Szekeres), étudié dans une partie ultérieure.

- La comparaison des figures précédentes montre que, si on raccorde les deux graphiques au point où la particule de référence (en vert) passe par la limite  $r = r_0$  (en pointillés), les parties gauche des graphiques se chevauchent.

Ceci ne signifie pas qu'il existe des points avec les mêmes valeurs de  $R$  et  $T$ , représentés deux fois, mais indique au contraire que ces coordonnées n'ont pas la même signification pendant l'ascension et pendant la descente (il est clair que, pour ces points,  $r$  et  $c t$  ne se correspondent pas).

Cela n'empêche pas d'utiliser l'ensemble des deux représentations pour décrire la particule de référence, mais qu'en est-il des autres particules en comouvement ( $R = Cste$ ) ? Une telle particule partie plus tôt (aussi bien pour  $t$  que pour  $T$ ) a une trajectoire plus à droite pour l'ascension (en violet), mais la suite de son mouvement donne une trajectoire plus à gauche pour la descente (en violet) ; les deux ne se raccordent pas.

- On peut tenter d'utiliser une représentation changeant le sens de l'axe de  $R$  pour l'une des deux parties (voire de changer le signe de  $R$  dans les relations en gardant le même sens de l'axe). Cela rendrait toutes les trajectoires en comouvement raccordables, mais serait illusoire.

L'existence des parties de trajectoires qui ne sont pas en comouvement, montre que le diagramme obtenu par raccordement serait de toute façon incomplet.

- En particulier, dans l'intervalle entre les passages en  $r = r_0$  des trajectoires en vert et en violet, tout photon échangé entre les deux particules rejoindrait, dans chacune des figures, une partie en comouvement et une qui ne l'est pas, cela sans passer par  $r = r_0$ .

Dans la réunion des deux graphiques, ces photons seraient donc représentés deux fois, d'une façon qui ne pourrait pas se raccorder au niveau de  $r = r_0$  pour donner une représentation unique reliant les deux graphiques, donc qui ne pourrait pas permettre de se passer des portions de trajectoires qui ne sont pas en comouvement.

- On ne peut donc pas obtenir ainsi de représentation du référentiel comobile pour l'ensemble du mouvement d'une particule montant puis redescendant. Les deux cas, contraction et expansion, donnent chacun une représentation "complète" (pour  $r \leq r_0$ ).

À part l'information théorique apportée par leur existence (montrant la généralité des transformations de type Lemaître), ces représentations apportent donc plutôt moins que les formes classiques (limitation sur les valeurs de  $r$  et calculs plus compliqués).

La suite des raisonnements sera donc faite avec la transformation de Lemaître "classique".

#### 4. Trajectoire de particules montant puis descendant

• Avec les notations “classiques” de Schwarzschild, on a constaté (chapitre sur l'interprétation du champ extérieur) que dans la région  $r < r_s$  il peut se produire des croisements de particules montant et descendant. On peut revenir sur le cas des particules qui montent jusqu'à  $r = r_0$  puis redescendent.

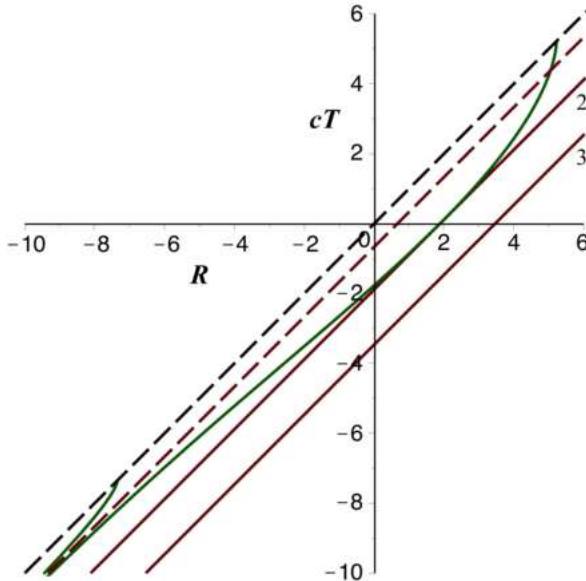
Pour simplifier (l'expression générale est plus compliquée), on se base ici sur le cas avec  $\alpha = 0,5 < 1$  (pour lequel  $r_0 = 2 r_s$ ).

• Lors de la montée, on utilise l'expression obtenue pour  $c t$  en notations réduites, avec l'origine de  $t$  pour  $r = r_0$ , réexprimée en fonction de  $\kappa$  :

$$c t = -\sqrt{\kappa^2 \cdot (2 - \kappa^2)} - 2 \arccos(\kappa^2 - 1) - \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{|\kappa^2 - 1|}\right).$$

On peut utiliser les relations entre  $(R, c T)$  et  $(r, c t)$ , en y modifiant la constante d'intégration pour décrire la trajectoire particulière telle que  $T = 0$  lors du passage en  $r = r_0$  :

$$R - \frac{2}{3}\kappa^3 = c T = c t + 2 \kappa - \ln\left(\left|\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right|\right) - 2 \kappa_0 + \ln\left(\left|\frac{\kappa_0+1}{\kappa_0-1}\right|\right).$$



Pour la descente, il suffit de changer le signe de  $c t$ . On obtient ainsi une représentation paramétrique de l'ensemble de la trajectoire.

- On vérifie donc que les mêmes particules peuvent sortir de la région  $r < r_s$ , puis y retomber (il s'agit de la même région). La sortie présente une divergence à  $T \rightarrow -\infty$  mais, avec un repérage de Lemaître en expansion, ce serait au contraire le cas pour la retombée. Il existe donc également des particules pouvant sortir.

Dans la mesure où cette description est invariante par changement de l'origine du temps, on retrouve qu'il peut exister deux telles particules,  $P'$  sortante et  $P$  entrante, se croisant dans la région  $r < r_s$ . Elles ont alors forcément un second croisement pour  $r > r_s$ .

♦ remarque : ici encore, contrairement à ce qui est souvent affirmé, on constate que, malgré l'une des deux divergences non éliminée au niveau de l'horizon, on peut ainsi représenter entièrement les trajectoires.

- L'allure générale de ces trajectoires, très allongée selon la diagonale  $r = Cste$ , amène à penser qu'une représentation en fonction de  $r$ , à une échelle plus petite pour  $T$ , donnerait une meilleure visualisation.

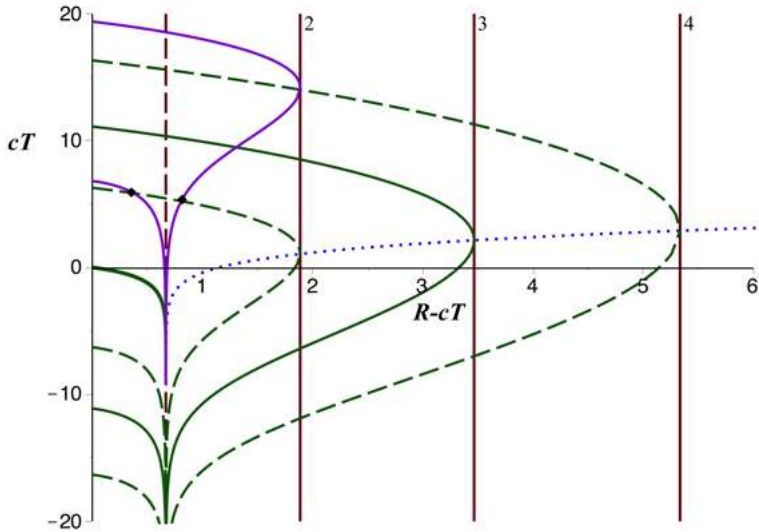
On outre, on peut aussi bien traiter le cas général en partant des expressions établies en coordonnées "classiques" et en utilisant les relations de changement de repérage.

La chute verticale depuis  $r_0$  avec une vitesse initiale nulle donne (avec  $r_s$  comme unité et en omettant la composante imaginaire) :

$$v = -c \sqrt{1 - \frac{A}{A_0}} = \frac{dr}{A dt} ; \quad c dt = -\sqrt{r_0 - 1} \frac{r^2 dr}{(r-1)\sqrt{r(r_0-r)}} ;$$

$$c t = \sqrt{r_0 - 1} \sqrt{r(r_0 - r)} + \left(1 + \frac{r_0}{2}\right) \sqrt{r_0 - 1} \arccos\left(\frac{2r}{r_0} - 1\right) + \operatorname{arcosh}\left(\frac{r_0 r - 2r + r_0}{r_0 |r-1|}\right).$$

Avec  $\kappa = \sqrt{r}$  ;  $c t = c T - 2\sqrt{r} + \ln\left(\left|\frac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{r}-1}\right|\right)$  et  $R - c T = \frac{2}{3} r^{3/2}$ , on obtient une représentation paramétrique des courbes en notations de Lemaître. Les droites  $R = Cste$ , qui étaient verticales, deviennent inclinées à vers la gauche (ici non représentées).



• En décalant les valeurs de  $t$ , on peut tracer (en violet) une trajectoire montant jusqu'à  $r_0 = 2 r_s$  puis redescendant, mais partant de  $r = 0$  après  $t = 0$ . On y retrouve une double intersection avec la trajectoire analogue (en tirets verts) commençant plus tôt (et atteignant son sommet à  $t = 0$ ).

On retrouve aussi le même problème qu'avec les notations "classiques" pour ce qui concerne l'ordre des deux croisements vus par l'une ou l'autre des particules (le repérage de Lemaître ne résout pas le problème).

Ici encore, ces difficultés peuvent sembler liées à la forme particulière des trajectoires au niveau de la divergence ; une étude (ultérieure) plus approfondie montre qu'il n'en est rien.

## 5. Croisement de particules et transformations de Lorentz

### 5.1. Étude des transformations de Lorentz

• On considère ici un croisement d'une particule entrante  $P$  et d'une particule sortante  $P'$ . Pour simplifier les calculs, on raisonne avec des particules en chute libre radiale avec une vitesse limite nulle à l'infini.

♦ remarque : aucun croisement n'apparaissait sur les graphiques précédents, où seules certaines portions utiles au raisonnement étaient représentées.

- Soit  $\mathcal{R}$  le référentiel en comouvement avec  $P$ , ayant une vitesse d'entraînement (vers le bas)  $\beta_e = -\sqrt{\frac{r_s}{r}}$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  statique.

Soit de même  $\mathcal{R}'$  le référentiel en comouvement avec  $P'$ , ayant une vitesse d'entraînement (vers le haut)  $\beta'_e = \sqrt{\frac{r_s}{r}}$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  statique.

- Soient  $(R, cT)$  les coordonnées d'un point dans  $\mathcal{R}$  et  $(R', cT')$  les coordonnées de ce point dans  $\mathcal{R}'$ , la transformation permettant de passer de  $\mathcal{R}'$  à  $\mathcal{R}$  (en éliminant  $dr$  et  $c dt$  entre les relations de Lemaître) correspond à :

$$dR = \frac{1}{A} \left[ \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) dR' + 2 c dT' \right] ; c dT = \frac{1}{A} \left[ 2 \frac{r_s}{r} dR' + \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) c dT' \right] .$$

Ces relations s'appliquent en particulier à  $P'$ , pour lequel  $dR' = 0$  et dont on peut noter  $(R'', cT'')$  les coordonnées dans  $\mathcal{R}$  :

$$dR'' = 2 \frac{1}{A} c dT'' ; c dT'' = \frac{1}{A} \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) c dT'' .$$

D'après la métrique,  $P'$  parcourt ainsi la distance  $d\ell = \sqrt{\frac{r_s}{r}} dR''$  pendant une durée  $dt_{\ell oc} = dT''$ , donc la vitesse d'entraînement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  correspond à :  $\beta''_e = \frac{d\ell}{c dt_{\ell oc}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{r}{r_s}} + \sqrt{\frac{r_s}{r}}} .$

On vérifie que cette vitesse peut être obtenue par combinaison des transformations de Lorentz :  $\beta''_e = \frac{\beta'_e - \beta_e}{1 - \beta'_e \beta_e} .$

- Il est remarquable d'obtenir une vitesse d'entraînement qui n'est jamais supraluminique (et tend même vers zéro pour  $r \rightarrow 0$ ), alors qu'elle est la combinaison de deux transformations qui le sont toutes les deux pour  $r < r_s$  .

Ainsi, si le référentiel en contraction est justifié physiquement, celui en expansion l'est forcément aussi.



## 5.2. Représentation graphique

• Comme pour tout point dans  $\mathcal{R}$ , on obtient pour  $P'$  :

$$R'' - cT''' = \frac{2r}{3} \sqrt{\frac{r}{r_s}} = \frac{2r_s}{3} \kappa''^3.$$

D'après ce qui précède :  $c dT''' = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) c dR''$ . Ainsi en combinant :

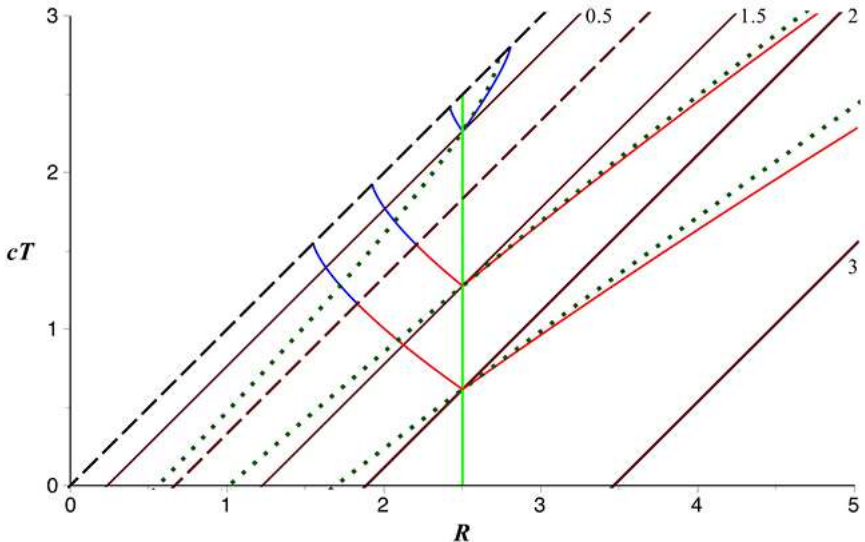
$$c dT''' = 2 r_s \frac{\kappa''^2 + 1}{\kappa''^2 - 1} \kappa''^2 d\kappa''.$$

En intégrant, on obtient (en omettant une composante imaginaire pour  $cT'''$ ) :

$$cT''' = \frac{2r_s}{3} \kappa''^3 + 4r_s \kappa'' + 2r_s \ln \left( \left| \frac{\kappa'' - 1}{\kappa'' + 1} \right| \right) + Cste ; R'' = cT''' + \frac{2r_s}{3} \kappa''^3.$$

Cela permet une représentation paramétrique de la trajectoire. On fixe la constante d'intégration en imposant le croisement avec  $P$  :  $R'' = R$  (constant) pour la valeur de  $cT''' = cT'$  qui donne la coordonnée  $r = r'' = r'$  de la position d'intersection choisie.

On peut ainsi ajouter sur le graphique, en pointillés, les trajectoires de trois particules  $P'$  sortantes croisant la particule  $P$  en chute ( $R = Cste$ , en vert) respectivement pour  $r = 2 ; 1,5 ; 0,5$  (en coordonnées réduites).



- Pour les particules sortantes  $P'$  croisant  $P$  en  $r > r_s$ , la particule  $P$  entrante voit  $P'$  s'éloigner de l'astre, moins vite que les photons sortants, en semblant provenir de l'horizon (en principe  $P$  ne voit pas la partie  $r < r_s$ ).

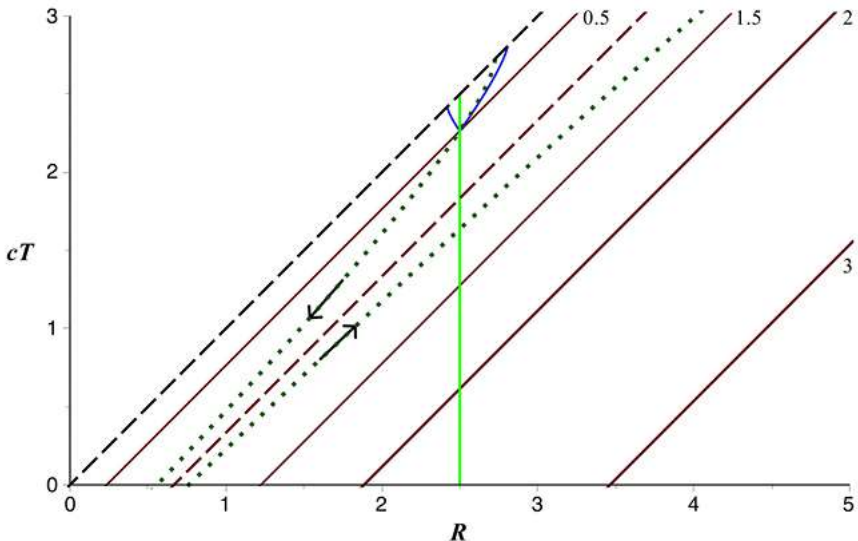
Par contre, pour les particules sortantes  $P'$  croisant  $P$  en  $r < r_s$ , le diagramme semble montrer que la particule  $P$  entrante voit  $P'$  "tomber" sur l'astre, plus vite que les photons dans le sens sortants (qui, selon l'interprétation usuelle, ne peuvent pas sortir), en semblant provenir de l'horizon.

La différence essentielle est que, par construction, on sait ici que  $P'$  sort.

◇ remarque : inversement de même, pour  $r < r_s$ , il semble que la particule  $P'$  sortante voit la particule  $P$  entrante incapable d'entrer.

- Une telle interprétation serait toutefois incohérente puisque  $A < 0$  implique que  $dR''$  et  $c dT''$  sont de signes contraires à  $c dT$  : la particule  $P'$  se comporte comme si elle remontait le temps (quand  $T'$  augmente,  $P'$  se déplace vers le bas, donc vers l'extérieur).

◇ remarque : si  $P'$  est un proton qui sort,  $P$  voit un antiproton qui entre.



Pour mieux comprendre, on peut tracer la trajectoire plus complète d'une particule  $P'$ , sans se limiter au voisinage d'un croisement avec  $P$ .

On constate que les deux particules se croisent deux fois : pour  $P$  il y a un croisement extérieur puis un croisement intérieur ; pour  $P'$  l'ordre des croisements est inversé.

- La relativité restreinte nous habitue à penser que la simultanéité dépend du référentiel, mais qu'un changement de référentiel conduise ici à retourner l'écoulement du temps sur toute une trajectoire, cela n'a rien d'évident.

- Qui plus est, dans cette région  $r < r_s$ , le photon émis dans le sens "sortant" ( $R$  croissant, à droite de  $P$ ), qui semble ne pas pouvoir sortir, peut en réalité peut être le faire. En effet, s'il est difficile de raisonner de façon analogue pour des particules de masse nulle, puisqu'on ne peut pas se placer dans leur référentiel propre, on sait par contre que ce photon "sort" plus vite que toute particule massive... qui (d'après ce qui précède) peut sortir.

◇ remarque : comme déjà constaté avec les coordonnées "classiques" de Schwarzschild, ces propriétés étranges sont liées à l'apparente invariance par translation dans le temps ; en fait il ne peut y avoir ni trou noir ni trou blanc permanent ; comme décrit par les repérages de Kruskal-Szekeres et de Novikov, il existe forcément un instant privilégié où un trou blanc termine son expansion et commence un effondrement en trou noir ; les particules ne peuvent que sortir dans le passé et ne peuvent qu'entrer dans le futur.

 *exercice n° XII.*

## 6. Transformation de Lemaître et coordonnées isotropes

- La transformation de Lemaître est élaborée en présupposant que l'expression de la vitesse de chute verticale, établie pour  $r > r_s$  en coordonnées "classiques", s'extrapole logiquement au delà.

Bien qu'une telle démarche ne soit pas a priori contradictoire, cela contient un biais de raisonnement : on peut tout aussi bien présupposer valide l'extrapolation prévue par le calcul en coordonnées isotropes. C'est ce qui est étudié ici.

Il est pour cela possible de raisonner simplement par l'intermédiaire de  $\underline{r}(r)$ , mais aussi de calculer directement avec  $\underline{r}$ .

- Avec les notations isotropes, la métrique (limitée à la partie radiale) s'écrit :

$$ds^2 = A c^2 dt^2 - \underline{C} d\underline{r}^2 = A \cdot \left[ c^2 dt^2 - \frac{\underline{C}}{A} d\underline{r}^2 \right] ;$$

$$A = \left( \frac{\underline{r} - \underline{r}_s}{\underline{r} + \underline{r}_s} \right)^2 ; \quad \underline{C} = \left( \frac{\underline{r} + \underline{r}_s}{\underline{r}} \right)^4 ; \quad \sqrt{\frac{\underline{C}}{A}} = \frac{(\underline{r} + \underline{r}_s)^3}{\underline{r}^2 |\underline{r} - \underline{r}_s|} .$$

- Pour une particule en chute libre verticale à partir de l'infini, avec une vitesse "initiale" (limite) nulle :  $v = -c \sqrt{1 - A} = -c \frac{2\sqrt{\underline{r}\underline{r}_s}}{\underline{r} + \underline{r}_s}$ .

♦ remarque : on vérifie que  $|v|$  passe par un maximum pour  $\underline{r} = \underline{r}_s$ .

- En construisant une transformation de Lemaître généralisée adaptée à cette vitesse, on est conduit à proposer :

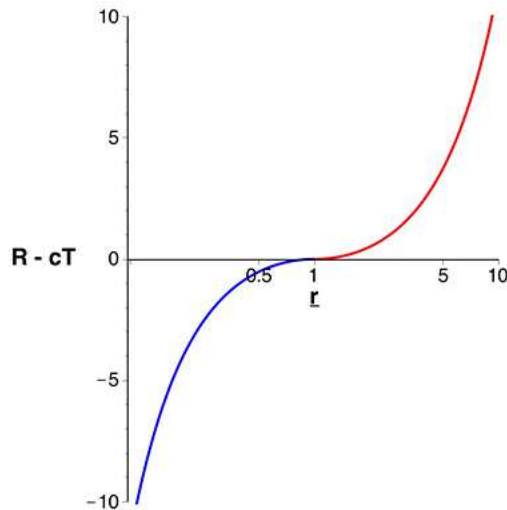
$$dR = c dt + \kappa \sqrt{\frac{\underline{C}}{A}} d\underline{r} ; \quad c dT = c dt + f \sqrt{\frac{\underline{C}}{A}} d\underline{r} ; \quad f = \frac{1}{\kappa} = \frac{2\sqrt{\underline{r}\underline{r}_s}}{\underline{r} + \underline{r}_s} .$$

Ceci donne une métrique sans singularité :  $ds^2 = c^2 dT^2 - f^2 dR^2$ .

- On obtient alors :  $d(R - c T) = (\kappa - f) \sqrt{\frac{\underline{C}}{A}} d\underline{r} = \frac{(\underline{r} + \underline{r}_s)^2 |\underline{r} - \underline{r}_s|}{2 \underline{r}^2 \sqrt{\underline{r}\underline{r}_s}} d\underline{r}$  ; l'intégration donne :  $R - c T = \frac{8 \operatorname{sgn}(\underline{r} - \underline{r}_s)}{3} \left( \left( \frac{\underline{r} + \underline{r}_s}{2 \sqrt{\underline{r}\underline{r}_s}} \right)^3 - 1 \right)$ .

♦ remarque : compte tenu de l'interprétation isotrope, on choisit la constante d'intégration telle que  $R - c T = 0$  pour  $\underline{r} = \underline{r}_s$ .

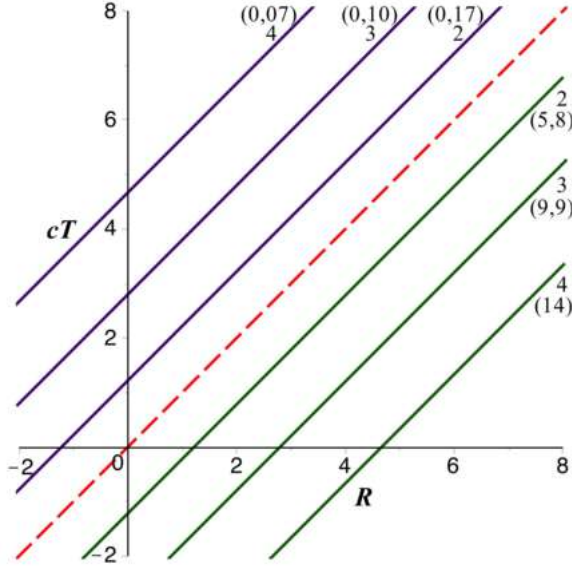
- Avec une échelle horizontale logarithmique (mieux adaptée aux coordonnées isotropes), on obtient la représentation suivante (avec  $\underline{r}_s$  comme unité).



◊ remarque : c'est qualitativement ce que donne la coordonnée  $r$  "classique" en raccordant les zones  $r \geq r_s$  en contraction puis en expansion (de l'autre côté de l'horizon), après élimination des zones  $r < r_s$  ; le raccordement est sans problème car ici  $A$  et  $\underline{C}$  ne changent pas de signe.

- Les lignes caractérisant  $\underline{r}(R, cT) = Cste$  sont ici encore des droites, mais leur écartement (en échelle logarithmique) tend vers l'infini quand  $\underline{r} \rightarrow 0$ . Ceci est associé au fait que dans ces conditions la variable "classique"  $r$  recroît vers l'infini.

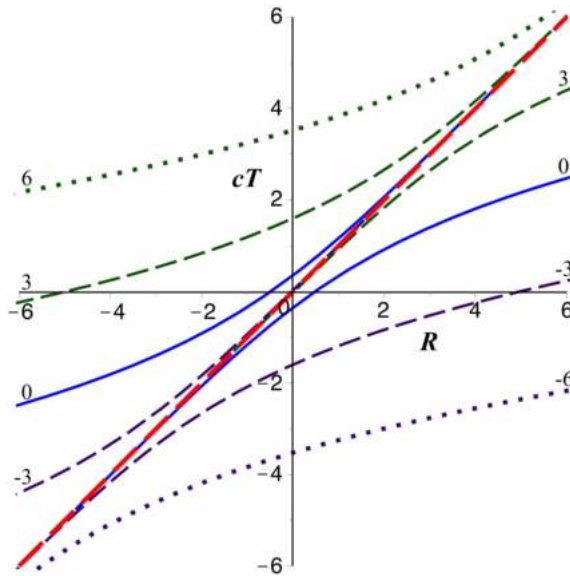
La représentation graphique peut d'ailleurs être faite "en fonction de  $r$ " (ci-après pour  $r = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4$  de part et d'autre, avec  $r_s$  comme unité).



• Lors de la chute libre radiale d'une particule, la métrique étant "synchrone", les droites  $R = Cste$  (lignes de temps) sont des géodésiques. Le mouvement se poursuit donc vers  $\underline{r} < \underline{r}_s$  correspondant à  $r > r_s$  ; ceci confirme la possibilité de raccorder les zones en contraction puis en expansion dans ce diagramme de Lemaître (avec les possibilités d'oscillations qui s'en déduisent).

• On obtient par ailleurs :  $d(cT - ct) = f \sqrt{\frac{c}{A}} d\underline{r} = \frac{2\sqrt{\underline{r}\underline{r}_s}(\underline{r} + \underline{r}_s)^2}{\underline{r}^2|\underline{r} - \underline{r}_s|} d\underline{r}$  ; ceci donne :  $cT - ct = 8 \operatorname{sgn}(\underline{r} - \underline{r}_s) \left[ \frac{\underline{r} + \underline{r}_s}{2\sqrt{\underline{r}\underline{r}_s}} + \ln \left( \left| \frac{\sqrt{\underline{r}} - \sqrt{\underline{r}_s}}{\sqrt{\underline{r}} + \sqrt{\underline{r}_s}} \right| \right) \right]$ .

On obtient la représentation suivante (pour  $ct = 0 ; \pm 3 ; \pm 6$  avec  $r_s$  comme unité).



◊ remarque : ici la convention de signe pour  $t$  dans la région  $\underline{r} < \underline{r}_s$  est conforme à  $A > 0$ , dans la mesure où  $t$  reste croissant.

• L'interprétation déduite des coordonnées "isotropes" semble éviter certaines difficultés associées à l'interprétation "classique", mais en fait apparaitre d'autres (et réciproquement).

Par contre, la méthode des repérages de Lemaître n'apporte aucun argument en ce sens. Si on calcule la vitesse de chute libre en présupposant l'une des deux interprétations, on en déduit un repérage de type Lemaître montrant que ceci est plausible, mais cela ne permet pas de discriminer.

Ces considérations physiques suggèrent ici encore que la simplification mathématique de la métrique n'est qu'un artifice de calcul fortuit. Celle-ci ne serait alors valable que pour  $r > r_s$ , la limite théorique  $r = r_s$  étant impossible à atteindre dans les conditions physiques réelles (selon L. S. Abrams).

 *exercice n° XIII.*