MÉTRIQUE DE LEMAÎTRE - GÉNÉRALISATIONS - exercices

I. Transformation de Lemaître généralisée et transformation de Lorentz

• La transformation de Lemaître joue un rôle analogue à celui d'une transformation de Lorentz. Appliquer cette dernière pour un référentiel comobile par rapport à une particule en chute libre radiale avec une vitesse initiale quelconque ; commenter le résultat obtenu.

II. Transformation de Lemaître généralisée et transformation classique

• On considère la transformation de Lemaître généralisée correspondant à une vitesse d'entraînement $v_e = -c\sqrt{1-\frac{A}{\alpha}}$ avec $\alpha = \frac{A_0}{1-\beta_0^2}$.

• Montrer que, au voisinage de l'horizon, le comportement de cette transformation est équivalent à celui de la transformation classique (pour $\alpha = 1$).

III. Expressions des coordonnées

1. • On veut déterminer l'expression de $R - c\,T$ pour la métrique de Lemaître, dans le cas d'une particule en chute libre radiale avec une vitesse initiale quelconque.

a) Étudier le cas $\alpha = 2$.
b) Étudier le cas $\alpha = \frac{1}{2}$.
c) Généraliser au cas $\alpha < 1$ quelconque.

2. • On veut déterminer l'expression de $c\,T - \sqrt{\alpha}\,c\,t$ pour la métrique de Lemaître, dans le cas d'une particule en chute libre radiale avec une vitesse initiale quelconque.

a) Étudier le cas $\alpha = 2$.
b) Étudier le cas $\alpha = \frac{1}{2}$.
c) Généraliser au cas $\alpha < 1$ quelconque.

IV. Variante de métrique

• Appliquer le principe de la transformation de Lemaître pour une vitesse de chute $v_e = -c\left(\frac{r_s}{r}\right)^{1/4}$.

V. Variante de métrique

• Appliquer le principe de la transformation de Lemaître pour une vitesse de chute $v_e = -c\,\frac{r_s}{r}$.

VI. Coordonnées de Lemaître-Eddington-Finkelstein

• On souhaiterait appliquer la méthode utilisée par Lemaître pour construire son repérage comobile avec les particules en chute libre radiale, mais en l'appliquant aux photons. Cela n'est pas directement possible puisque le calcul de Lemaître équivaut à une transformation de Lorentz et qu'on ne peut pas l'appliquer pour raisonner dans le référentiel propre des photons.

• Il existe toutefois une autre méthode aboutissant au repérage de Lemaître : on part d'une coordonnée associée à une particule en chute libre (analogue à celle d'Eddington-Finkelstein pour les photons, d'ailleurs utilisée par Kruskal et Szekeres pour construire leur repérage), puis on lui adjoint une variable temporelle correspondant au temps propre mesuré le long de la trajectoire. Cela n'est pas possible ici puisque le temps propre des photons est nul, mais on peut chercher une paramétrisation analogue. C'est cette méthode qu'on cherche à adapter.

1. a) Rappeler la relation décrivant le mouvement radial des photons.

b) Eddington et Finkelstein utilisent deux familles de telles trajectoires, correspondant à deux paramètres (généralement notés U et V) : $c\,t \mp \left(r + r_s\,\ln\left(\left|\frac{r}{r_s} - 1\right|\right)\right)$. Préciser la famille de courbes décrivant les photons descendants, dont ici on notera R le paramètre.

2. a) La trajectoire des particules massives peut être paramétrée par le temps propre τ (ou par s) ; déterminer la variable “naturelle” ς paramétrant la trajectoire des photons et proposer une variable temporelle T correspondante (le long d'une trajectoire).

b) Pour un déplacement quelconque dans le demi-plan $(r, c\,t)$, essayer de généraliser le résultat précédent. Commenter.

VII. Métrique d'Eddington-Finkelstein

1. a) Eddington et Finkelstein ont proposé plusieurs coordonnées pour réinterpréter la métrique de Schwarzschild, entre autres : $c\,t_+ = c\,t + r_s\,\ln\left(\left|\frac{r}{r_s} - 1\right|\right)$. Exprimer la métrique avec cette variable temporelle. Commenter.

b) On peut montrer que les équations du mouvement de chute radiale peuvent s'écrire sous la forme : $A\,\frac{c\,dt}{d\sigma} = \alpha_t = Cste$; $\frac{dr}{d\sigma} = -\sqrt{\alpha_t^2 + \alpha_r\,A}$ où $\alpha_r = Cste$ ($\alpha_r = 0$ pour les photons) et où $\sigma = s$ pour les particules massives. Déterminer $\frac{c\,dt_+}{d\sigma}$; montrer que, pour décrire le mouvement, $c\,t_+$ est un paramètre régulier au voisinage de $r = r_s$; montrer que sa variation est alors monotone.

c) Ces propriétés semblent indiquer que la variable t_+ est un “bon paramètre” du genre temps ; justifier que cela est contradictoire avec l'expression précédente de la métrique. Commenter.

2. a) Montrer qu'on peut résoudre la difficulté précédente en définissant une coordonnée r_+ appropriée. Préciser l'expression correspondante de la métrique.

b) Justifier qu'une telle démarche est analogue à celle de Lemaître. Exprimer la vitesse d'entraînement correspondante.

3. • Il peut être intéressant de représenter les trajectoires de photons entrants et sortants (cônes de lumière) dans le plan $(r,\ c\,t_+)$ plutôt qu'avec les coordonnées $(r_+\ ,\ c\,t_+)$ du type Lemaître. Montrer qu'on retrouve en conséquence le fait qu'aucune particule ne peut sortir de la zone $r < r_s$.

VIII. Choix de l'origine du repère de Lemaître

• On considère un repérage de Lemaître avec une vitesse d'entraînement centripète $v_e = -c\,\sqrt{1 - \frac{A}{\alpha}}$.

• Les relations entre $R(r, c\,t)$ et $c\,T(r, c\,t)$ sont usuellement obtenues avec des constantes d'intégration nulles, mais pour $\alpha < 1$ il est prudent de vérifier la validité du choix de ces constantes, qui fixent l'origine en $R = 0$ et $c\,T = 0$ pour $r = 0$ et $c\,t = 0$.

• Si on étudie le référentiel d'une particule en ascension depuis $r = 0$ jusqu'à r_0 , puis retombant jusqu'à $r = 0$, on ne peut pas a priori fixer l'origine à la fois au départ et à l'arrivée. Il faut en outre se méfier du fait qu'il peut généralement exister trois occurrences de $c\,t = 0$: pour $r < r_s$ au début de l'ascension, pour $r > r_s$ lors du mouvement “classique”, pour $r < r_s$ en fin de redescente.

• Vérifier la cohérence de ce choix (ou en proposer un autre).

IX. Trajectoires de particules ascendantes puis descendantes

1. • On considère un repérage de Lemaître avec une vitesse d'entraînement centripète $v_e = -c\sqrt{1-\frac{A}{\alpha}}$ dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$.

• Par rapport à ce repérage, étudier le mouvement d'une particule ascendante, ayant une vitesse $v = c\sqrt{1-\frac{A}{\alpha}}$ par rapport au repère de Schwarzschild. Montrer qu'on peut en déduire l'expression $c\,t(r)$.

2. • Vérifier qu'on retrouve $dR = 0$ si on considère de façon analogue le mouvement d'une particule descendante (en comouvement avec le référentiel).

X. Extension pour un repérage de Lemaître généralisé avec α < 1

1. • On considère un repérage de Lemaître généralisé avec $\alpha = A_0 \in]0\,;1[$; ceci correspond à un “sommet” de trajectoire pour $r_0 = \frac{1}{1-\alpha}$.

a) Rappeler l'inconvénient de la métrique correspondante pour $r > r_0$.

b) Afin de chercher un prolongement de la représentation de base, pour $\alpha \in]0\,;1[$, montrer qu'on ne peut pas proposer un repérage avec une vitesse d'entraînement en expansion.

2. • On se propose d'étudier s'il est possible de prolonger la représentation de base à l'aide de notations complexes. Pour $\alpha = A_0 < 1$ (avec r_s comme unité), les relations obtenues s'écrivent :

$$R - c\,T = r_0\sqrt{r_0}\,\arcsin\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right) - \sqrt{r_0\,r.(r_0-r)}\ ;$$

$$c\,T - \sqrt{\alpha}\,c\,t = \frac{\sqrt{r.(r_0-r)}}{\sqrt{r_0}} + \frac{\frac{r_0}{2}-1}{\sqrt{r_0}}\left[\arcsin\left(\frac{2\,r}{r_0}-1\right)+\frac{\pi}{2}\right] - \frac{\sqrt{r_0-1}}{\sqrt{r_0}}\,\operatorname{arcosh}\left(\frac{r.(r_0-2)+r_0}{r_0\,|r-1|}\right).$$

• Peut-on prolonger ces expressions dans la zone $r > r_0$?

3. • Pour $r_0 = 2$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ (avec r_s comme unité), déterminer et représenter $r(R, c\,T)$ et $c\,t(R, c\,T)$ dans le prolongement de la représentation $(R, c\,T)$.

4. • Représenter ainsi la trajectoire d'une particule en chute libre depuis l'infini avec une vitesse “initiale” (limite) nulle.

XI. Anomalie fondamentale de la singularité centrale

• Après effondrement d'un astre en trou-noir, on considère généralement que toute la matière est annihilée en une singularité centrale en $r = 0$. Ceci suppose qu'ensuite cette singularité est la seule origine du champ gravitationnel, donc qu'elle serait munie de propriétés physiques.

• Calculer la vitesse de cette singularité par rapport aux particules comobiles ; commenter.

XII. Croisement de particules entrantes et sortantes

1. • On considère une particule P en chute libre radiale, étudiée dans son référentiel $\mathcal{R}$ en comouvement de contraction.

• On considère de même une particule P' en mouvement libre radial centrifuge, étudiée dans son référentiel $\mathcal{R}'$ en comouvement d'expansion. Maintenant on souhaite étudier comment la particule P “voit” la particule P' dans $\mathcal{R}$. On note $c\,T''$ et R'' les coordonnées de P' dans $\mathcal{R}$.

a) Montrer que $c\,T'' - c\,T' = R'' + R'$ (où $R' = Cste$).

b) En reportant dans l'expression de ds^2, dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, en déduire les expressions de $c\,dT''$ et dR'' en fonction de $\kappa'' = \sqrt{\frac{r'}{r_s}}$.

c) Intégrer pour obtenir une représentation paramétrique de la trajectoire de P' dans $\mathcal{R}$. Commenter.

2. • Pour confirmer les résultats précédents, combiner les transformations de Lemaître passant du référentiel statique $\mathcal{R}_0$ respectivement à ceux $\mathcal{R}$ de P et $\mathcal{R}'$ de P'. Commenter.

XIII. Coordonnées “isotropes”

1. • Étudier la transformation de Lemaître avec les coordonnées “isotropes”, dans le cas d'une chute libre radiale avec une vitesse “initiale” (limite) nulle à l'infini. Commenter.

2. • Caractériser graphiquement les courbes $\underline{r} = Cste$ en passant par l'intermédiaire de $r(R, c\,T)$ avec $r > r_s$ pour $\underline{r} < \underline{r_s}$.
• Caractériser de même les courbes $c\,t(R, c\,T)$ correspondantes.

3. • Dans l'espace-temps décrit par les coordonnées isotropes, les particules en chute libre radiale effectuent des oscillations de part et d'autre de l'horizon. Représenter ce mouvement dans un repérage $(R, c\,T)$.