INTERPRÉTATION DU CHAMP SPHÉRIQUE EXTÉRIEUR - corrigé des exercices

I. Comportement étrange des coordonnées “isotropes”

1.a. • On peut écrire : $r = \tilde{r} + \frac{\tilde{r}_s{}^2}{\tilde{r}}$ donc $\frac{dr}{d\tilde{r}} = 1 - \frac{\tilde{r}_s{}^2}{\tilde{r}^2}$. Le minimum (dérivée nulle) pour $\tilde{r} = \tilde{r}_s$ doit correspondre à $r_s = r(\tilde{r}_s) = 2\,\tilde{r}_s$; ainsi $\tilde{r}_s = \frac{r_s}{2}$.

1.b. • On obtient directement : $A(\tilde{r}) = 1 - \frac{r_s}{r(\tilde{r})} = \frac{(\tilde{r}-\tilde{r}_s)^2}{\tilde{r}^2+\tilde{r}_s{}^2}$; $D(\tilde{r}) = (r(\tilde{r}))^2 = \left(\tilde{r} + \frac{\tilde{r}_s{}^2}{\tilde{r}}\right)^2$. On constate que le changement de signe de A est évité.

• Par ailleurs : $\tilde{C}(\tilde{r})\,d\tilde{r}^2 = C(r)\,dr^2$ donc : $\tilde{C}(\tilde{r}) = C(r)\left(\frac{dr}{d\tilde{r}}\right)^2 = \frac{\tilde{r}^2+\tilde{r}_s{}^2}{(\tilde{r}-\tilde{r}_s)^2}\,\frac{\left(\tilde{r}^2-\tilde{r}_s{}^2\right)^2}{\tilde{r}^4} = \frac{\left(\tilde{r}^2+\tilde{r}_s{}^2\right)(\tilde{r}+\tilde{r}_s)^2}{\tilde{r}^4}$. On constate qu'en outre la divergence de $\tilde{C}$ est évitée.

2.a. • On peut écrire : $A(r) = 1 - \frac{r_s}{r} = \left(1 - \frac{\tilde{r}_s}{\tilde{r}}\right)^2$ donc $\frac{r_s}{r} = \frac{\tilde{r}_s}{\tilde{r}}\left(2 - \frac{\tilde{r}_s}{\tilde{r}}\right)$. La limite à l'infini doit correspondre à $\tilde{r} \approx r$, donc $r_s = 2\,\tilde{r}_s$; c'est à dire $\tilde{r}_s = \frac{r_s}{2}$.

2.b. • La relation précédente donne $r(\tilde{r}) = \frac{2\,\tilde{r}^2}{2\,\tilde{r}-\tilde{r}_s}$ on obtient directement : $D(\tilde{r}) = (r(\tilde{r}))^2 = \frac{4\,\tilde{r}^4}{(2\,\tilde{r}-\tilde{r}_s)^2}$.

• Par ailleurs : $\tilde{C}(\tilde{r})\,d\tilde{r}^2 = C(r)\,dr^2$ donc : $\tilde{C}(\tilde{r}) = \frac{1}{A(r)}\left(\frac{dr}{d\tilde{r}}\right)^2 = \frac{\tilde{r}^2}{(\tilde{r}-\tilde{r}_s)^2}\,\frac{16\,\tilde{r}^2.(\tilde{r}-\tilde{r}_s)^2}{(2\,\tilde{r}-\tilde{r}_s)^4} = \frac{16\,\tilde{r}^4}{(2\,\tilde{r}-\tilde{r}_s)^4}$.

• On constate que la divergence de $\tilde{C}$ pour $\tilde{r} = \tilde{r}_s$ est évitée, mais qu'il semble apparaitre une autre divergence pour $\tilde{r} = \frac{\tilde{r}_s}{2}$. Cette limite correspond toutefois à $r \to \infty$ (et $\underline{r} \to 0$ en coordonnée “isotrope”), on peut donc considérer qu'elle ne peut pas être dépassée ; elle redonne d'ailleurs $A \to 1$.

II. Distances radiales

1.a. • La distance spatiale ρ correspond dans ce cas à : $d\ell = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}}\,dr = d\rho$.

• On peut intégrer à l'aide de la variable $\xi = \pm\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}$; ainsi : $r = \frac{r_s}{1-\xi^2}$; $d\rho = \frac{1}{\xi}\,dr = \frac{2\,r_s}{(1-\xi^2)^2}\,d\xi$.

• Une décomposition en fraction rationnelles simples donne : $\rho = \frac{r_s}{2}\ln\left(\left|\frac{1+\xi}{1-\xi}\right|\right) + \frac{r_s\,\xi}{1-\xi^2} + Cste$; ceci correspond à : $\rho = \pm\,r_s\ \mathrm{artanh}\left(\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}\right) \pm r\,.\sqrt{1-\frac{r_s}{r}} + Cste$.

1.b. • pour $r < r_s$ la variable r n'est plus du genre espace, donc le calcul d'une “longueur” $d\ell$ ainsi définie (complexe ?) est a priori dépourvu de signification (il faudrait en définir une généralisation).

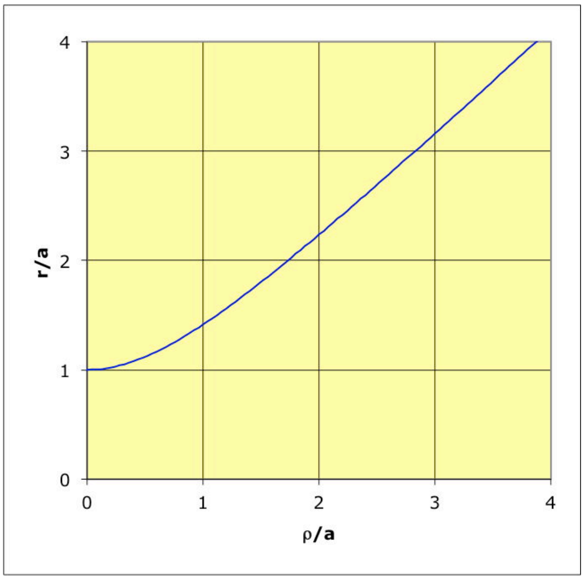
2.a. • La distance spatiale ρ correspond dans ce cas à : $d\ell = \left(1 + \frac{\underline{r_s}}{\underline{r}}\right)^2 d\underline{r} = d\rho$.

• On obtient alors : $\rho = \underline{r_s}\ \ln\left(\frac{\underline{r}^2}{\underline{r_s}^2}\right) + \underline{r}\,.\left(1 - \frac{\underline{r_s}^2}{\underline{r}^2}\right) + Cste$.

2.b. • En substituant $\underline{r} = \frac{1}{2}\left(r - \frac{r_s}{2} \pm \sqrt{r\,.(r-r_s)}\right)$ avec par ailleurs $\underline{r_s} = \frac{r_s}{4}$, on peut vérifier (après une simplification un peu laborieuse) qu'on retrouve : $\rho = \pm\,r_s\ \mathrm{artanh}\left(\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}\right) \pm r\,.\sqrt{1-\frac{r_s}{r}} + Cste$.

◊ remarque : $\underline{r} = \frac{1}{2}\left(r - \frac{r_s}{2} + \sqrt{r\,.(r-r_s)}\right) > \underline{r_s}$ avec $r > r_s$ et $\underline{r} = \frac{1}{2}\left(r - \frac{r_s}{2} - \sqrt{r\,.(r-r_s)}\right) < \underline{r_s}$ avec $r > r_s$.

III. Métrique “artificiellement divergente”



1.a. • On obtient inversement : $r = \sqrt{\rho^2 + a^2}$ avec la représentation ci-contre.

1.b. • Ceci donne : $d\rho = \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}}$, puis :

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - \frac{1}{1-\frac{a^2}{r^2}}\, dr^2 - \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\, r^2\, d\Omega^2 \ .$$

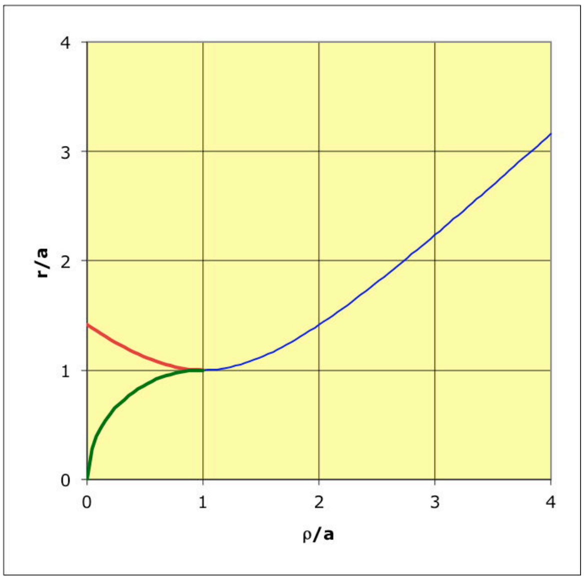
1.c. • La divergence pour $r = a$ n'est qu'apparente car un point qui atteint cette limite arrive en fait à l'origine $\rho = 0$; il ne s'agit donc que d'un comportement limite découlant du choix de la variable radiale r.

• De même qu'en coordonnées sphériques le physicien convient de ne pas décrire le passage par l'origine en utilisant alors $\rho < 0$ (il considère alors $\rho > 0$ mais avec $\varphi \leftarrow \varphi + \pi$), il est ici “logique” de ne pas utiliser $r < a$.

• Les divergences apparentes de cette première sorte sont aisément compensées : il suffit d'utiliser la variable “recentrée” $r' = r - a$ et la métrique non divergente :

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - \frac{\left(1+\frac{a}{r'}\right)^2}{1+\frac{2a}{r'}}\, dr'^2 - \left(1 + \frac{2a}{r'}\right)\, r'^2\, d\Omega^2 \ .$$

◊ remarque : cela ressemble à la démarche de L. S. Abrams vis à vis de la métrique “classique”.



2.a. • On obtient inversement : $r = \sqrt{(\rho - a)^2 + a^2}$ mais, si on se limite à des coordonnées réelles, cette expression ne s'applique que pour $r \geq a$ et $\rho \geq a$.

• Pour décrire la partie avec $\rho < a$ on peut utiliser :

◊ (en rouge) $\rho = a - \sqrt{r^2 - a^2}$ mais ceci perd la bijection entre ρ et $r(\rho)$;

◊ (en vert) $\rho = a - \frac{r^2-a^2}{\sqrt{|r^2-a^2|}}$ mais avec $r = \sqrt{(\rho - a)\,.\,|\rho - a| + a^2}$.

◊ remarque : ceci ressemble au problème évoqué dans la comparaison des coordonnées “classiques” et “isotropes”.

2.b. • On obtient : $d\rho = \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}}$, puis :

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{a^2}{r^2}} - \left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}} + \frac{a}{r}\right)^2 r^2\, d\Omega^2 \ .$$

2.c. • La divergence pour $r = a$ n'est qu'apparente (il ne s'agit ici encore que d'un comportement limite découlant du choix de la variable r), mais cette seconde sorte de divergence ne peut pas être simplement compensée. Si, par résolution d'équations liées aux propriétés de l'espace, on obtient la métrique en fonction de r, alors on ne dispose d'aucune information pour savoir comment la prolonger pour $r < a$ et/ou $\rho < a$.

• Considérons en particulier un point matériel (isolé) en mouvement rectiligne uniforme vers l'origine : $\rho = \rho_0 - v\, t$. Lorsque ce mobile dépasse la limite $\rho = a$, si on raisonne avec ρ puis qu'on utilise la relation $r = \sqrt{(\rho - a)^2 + a^2}$, il semble “rebondir” sur la limite $r = a$.

• Si on raisonne avec r et t (en se limitant au mouvement radial) on obtient :

$$g_{00} = 1 \;\; ; \;\; g_{11} = -\frac{1}{1-\frac{a^2}{r^2}} \;\; ; \;\; g^{00} = 1 \;\; ; \;\; g^{11} = -\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right).$$

• La connexion correspond à : $\Gamma_{111} = \frac{r\, a^2}{(r^2-a^2)^2}$; $\Gamma^1{}_{11} = -\frac{a^2}{r.(r^2-a^2)}$.

• Les équations du mouvement peuvent s'écrire : $\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\, \frac{dx^\mu}{d\tau}\, \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$; ainsi $\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = 0$ et on peut paramétrer par le temps t : $\ddot{r} + \Gamma^1{}_{11}\, \dot{r}^2 = 0$.

• On obtient ainsi : $\ddot{r} = \frac{a^2}{r.(r^2-a^2)}\, \dot{r}^2$, puis : $\ln(\dot{r}) = \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) + Cste$; $\dot{r} = Cte.\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}$, tout à fait compatible avec $d\rho = \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}}$ et $\dot{\rho} = -v = Cste$.

• Puisque $\dot{r} \to 0$ pour $r \to a$, l'accélération apparente (centrifuge) $\ddot{r} = \frac{a^2\, v^2}{r^3}$ restant finie, elle est telle que le point semble “rebondir” sur la singularité pour $r = a$, or (faute d'indication contraire) on peut croire à tort qu'il s'agit d'un rebond réel. Pour retrouver la fin de la décroissance de ρ (jusqu'à l'origine), il faudrait en effet utiliser après le “rebond” : $d\rho = -\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}}$ et $\rho = a - \sqrt{r^2-a^2}$, ce qu'on n'a pas a priori de raison de soupçonner. Donc, même s'il y a en principe “invariance relativiste”, on ne peut tout de même pas utiliser sans précaution n'importe quelles coordonnées (en particulier, l'interprétation de la variable $\underline{r}$ isotrope n'est pas évidente).

IV. Métrique “artificiellement divergente”

1. • La limite $\underline{r} \to 0$ correspond à $r \to \infty$ (en coordonnées “classiques”) de l'autre côté de l'horizon, pour laquelle $d\ell \approx dr$. Un déplacement infini est alors représenté par une variation finie de $\underline{r}$, donc $\underline{C}(\underline{r}) = \left(\frac{d\ell}{d\underline{r}}\right)^2$ diverge (comme $\frac{1}{\underline{r}^4}$).

2. • On obtient dans ce cas $d\eta = 3\, \frac{x^2}{\alpha^2}\, dx$ et $d\ell = dx = \sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{\eta^2}}\, \frac{d\eta}{3}$ divergent pour $\eta \to 0$.

• Ceci correspond aussi à $x \to 0$ et un déplacement $d\ell = dx$ donné correspond dans ces conditions à une variation $d\eta$ infiniment plus petite. Cela n'empêche toutefois pas le changement de signe puisque $\frac{x^2}{\alpha^2} \geq 0$; en outre, il n'y a pas d'ambiguïté de signe puisque $\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{\eta^2}} = \left(\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\eta}}\right)^2 \geq 0$.

◊ remarque : il n'y a pas plus d'ambiguïté pour l'expression quadratique $d\ell^2 = dx^2 = \sqrt[3]{\frac{\alpha^4}{\eta^4}}\, \frac{d\eta^2}{9}$.

3.a. • On obtient dans ce cas $d\xi = 2\, \frac{x}{\alpha}\, dx$ et $d\ell = dx = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\xi}}\, \frac{d\xi}{2}$ divergent pour $\xi \to 0$. Les deux signes possibles sont associés aux deux sens de variation de part et d'autre de l'extremum pour $x = 0$.

• Ceci correspond aussi à $x \to 0$ et un déplacement $d\ell = dx$ donné correspond dans ces conditions à une variation $d\xi$ infiniment plus petite. Cela empêche en outre le changement de signe de ξ puisque $\frac{x}{\alpha}$ change de signe et impose un extremum ; par contre, il n'y a pas de problème de signe sous la racine puisque $\frac{\alpha}{\xi} \geq 0$.

• Au contraire, il apparait une ambiguïté de signe pour l'expression quadratique $d\ell^2 = dx^2 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\xi^2}}\, \frac{d\xi^2}{4}$ que l'on peut être tenté d'écrire $d\ell^2 = dx^2 = \frac{\alpha}{\xi}\, \frac{d\xi^2}{4}$, masquant ainsi l'impossibilité de $\xi < 0$ et suggérant que dans ce cas la variable ξ deviendrait du genre temps.

3.b. • La variable r “classique” de Schwarzschild présente ce type de difficulté pour $r = r_s$, avec $C(r) = \left(\sqrt{\frac{r}{r-r_s}}\right)^2$ que l'on peut envisager d'écrire $C(r) = \frac{r}{r-r_s}$.
• En pratique, il peut aussi sembler mieux de considérer $r = r_s$ au delà de l'horizon (les valeurs $r < r_s$ n'existant pas dans ces conditions ; l'interprétation de la variable r “classique” n'est pas évidente).

V. Point matériel en chute libre

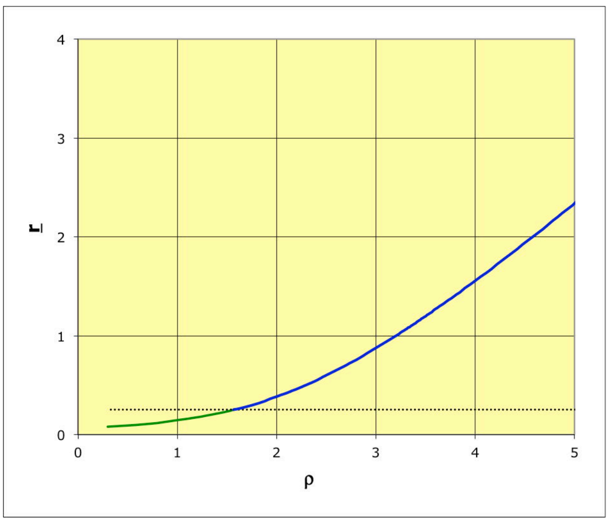
1.a. • La métrique “isotrope”, limitée au mouvement radial, s'écrit : $ds^2 = A(\underline{r})\, c^2\, dt^2 - \underline{C}(\underline{r})\, d\underline{r}^2$. On en déduit les équations du mouvement géodésique (avec les dérivations par rapport à s) :

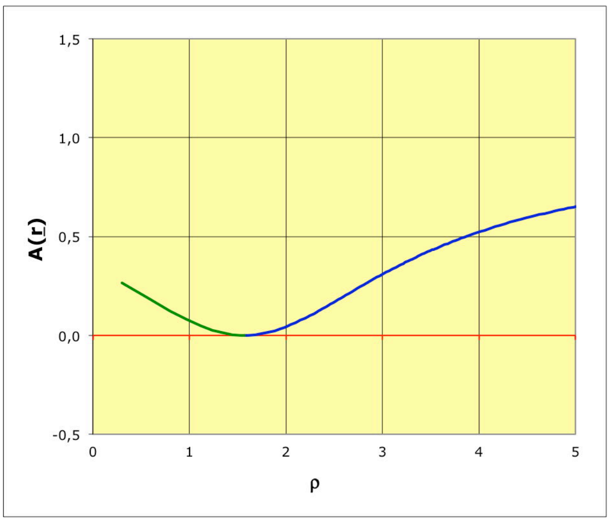
$$\ddot{t} + \frac{A'}{A}\, \dot{t}\, \dot{\underline{r}} = 0 \quad ; \quad \ddot{\underline{r}} + \frac{A'}{2\,\underline{C}}\, c^2\, \dot{t}^2 + \frac{\underline{C}'}{2\,\underline{C}}\, \dot{\underline{r}}^2 = 0\ .$$

1.b. • En posant $T = \dot{t}$, la première équation peut s'écrire : $T'\,A + T\,A' = 0$; on en déduit $T\,A = Cte$.
• Pour un point matériel initialement immobile : $d\underline{r} = 0$; $ds = \sqrt{A(\underline{r}_0)}\ c\,dt$; $T_0 = \frac{1}{c\,\sqrt{A_0}}$; finalement : $T\,A = T_0\,A_0 = \frac{\sqrt{A_0}}{c}$.
• Le résultat de l'autre équation peut être obtenu plus simplement en reportant l'expression de T dans la métrique : $c\,dt = \frac{\sqrt{A_0}}{A}\,ds$, donc : $ds^2\left(\frac{A_0}{A} - 1\right) = \underline{C}\,d\underline{r}^2$ et finalement : $R^2 = \dot{\underline{r}}^2 = \frac{1}{\underline{C}}\left(\frac{A_0}{A} - 1\right)$.

2.a. • La durée locale, mesurée par un observateur <u>immobile</u>, est telle que : $ds^2 = c^2\,dt_{\ell oc}^2$, c'est à dire : $dt_{\ell oc} = \sqrt{A}\,dt$.
• La distance parcourue est : $d\ell = -\sqrt{\underline{C}}\,d\underline{r}$ (on considère un mouvement centripète).

2.b. • La vitesse (en norme) est donc : $v = \frac{d\ell}{dt_{\ell oc}} = -\sqrt{\frac{\underline{C}}{A}}\,\frac{d\underline{r}}{dt} = -\sqrt{\frac{\underline{C}}{A}}\,\frac{R}{T} = c\,\sqrt{1 - \frac{A}{A_0}}$.
• On constate que la vitesse de chute tend vers c quand $\underline{r} \to \underline{r}_s$; c'est aussi ce qu'on obtient avec la variable r “classique” : conformément à l'invariance relativiste, le résultat est effectivement le même tant que les coordonnées utilisées ne sont pas inadaptées.
• Si on envisage alors que le point continue son mouvement au delà de cette limite, on constate que $A = \left(\frac{\underline{r}-\underline{r}_s}{\underline{r}+\underline{r}_s}\right)^2$ s'annule puis redevient positif : sous l'effet de ce qui devrait être l'attraction de l'astre, la vitesse diminue !
◊ remarque : il s'agit ici simplement d'une situation où la courbure de l'espace est telle que l'attraction est dans l'autre sens (apparaissant ainsi comme une répulsion) ; il serait inapproprié de nommer cet effet “anti-gravité” puisqu'un tel phénomène (s'il existait) correspondrait plutôt à une équation du type : $R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\,R = -\,\chi\,T^{\alpha\beta}$ (l'énergie courbant l'espace de façon opposée).





• Si on admet qu'il existe un modèle limite pour un astre “ponctuel”, l'interprétation physique la plus plausible semblerait celle d'admettre que le point matériel est passé de l'autre côté de l'astre attracteur : l'origine ne correspondant pas à $\underline{r} = 0$ mais à $\underline{r} = \underline{r}_s$ (selon L.S. Abrams).
• D'un autre point de vue, pour un astre non “ponctuel” tel que l'horizon soit extérieur, la matière en surface serait éjectée par une force de gravitation orientée vers l'extérieur. Ceci peut être visualisé en fonction de la distance radiale ρ : l'augmentation du “potentiel” A pour les faibles distances correspond à une force répulsive.

VI. Point matériel en chute libre

1.a. • La métrique “classique”, limitée au mouvement radial, s'écrit : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2$. On en déduit les équations du mouvement géodésique (avec les dérivations par rapport à s) :

$$\ddot{t} + \frac{A'}{A}\, \dot{t}\, \dot{r} = 0 \quad ; \quad \ddot{r} + \frac{A'}{2\,C}\, c^2\, \dot{t}^2 + \frac{C'}{2\,C}\, \dot{r}^2 = 0\, .$$

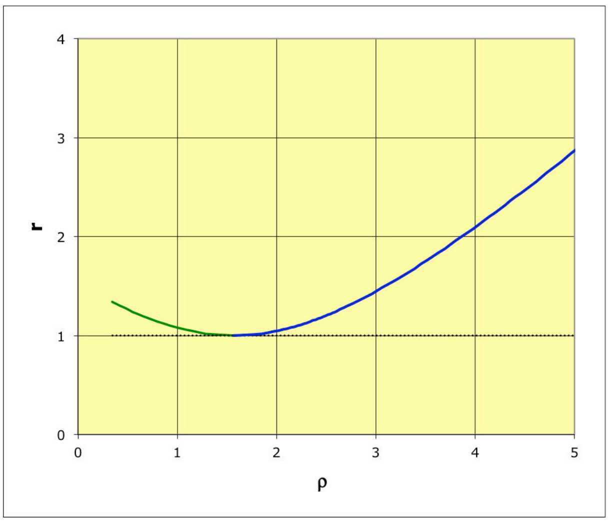
1.b. • En posant $T = \dot{t}$, la première équation peut s'écrire : $T'\, A + T\, A' = 0$; on en déduit $T\, A = Cte$.
• Pour un point matériel initialement immobile : $dr = 0$; $ds = \sqrt{A(r_0)}\ c\, dt$; $T_0 = \frac{1}{c\sqrt{A_0}}$; finalement : $T\, A = T_0\, A_0 = \frac{\sqrt{A_0}}{c}$.
• En posant $R = \dot{r}$, la deuxième équation peut s'écrire, compte tenu de $A\, C = 1$:

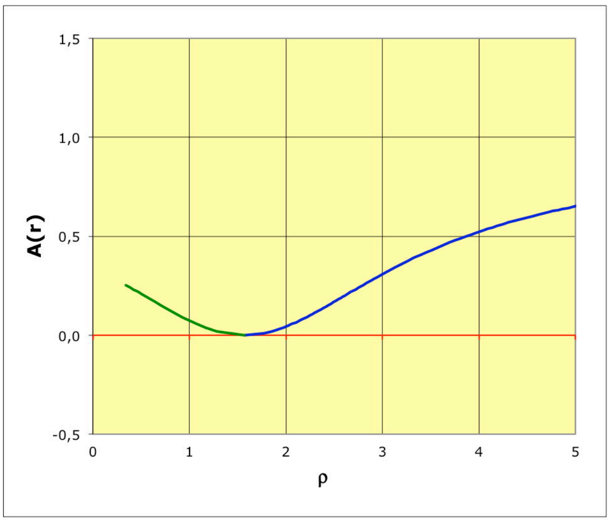
$$R\, R' + \frac{A'}{2\,C}\, c^2\, T^2 + \frac{C'}{2\,C}\, R^2 = R\, R' + \frac{C'}{2\,C}\, (R^2 - A_0) = 0 \ ;\ C.(R^2 - A_0) = Cte\, .$$

• Pour un point initialement immobile : $R(r_0) = 0$ et $C.(R^2 - A_0) = -1$; finalement : $R^2 = A_0 - A$.
◊ remarque : ceci peut être déduit plus simplement en reportant l'expression de T dans la métrique.

2.a. • La durée locale, mesurée par un observateur <u>immobile</u>, est telle que : $ds^2 = c^2\, dt_{\ell oc}^2$, c'est à dire : $dt_{\ell oc} = \sqrt{A}\, dt$.
• La distance parcourue est : $d\ell = -\sqrt{C}\, dr$ (on considère un mouvement centripète).

2.b. • La vitesse (en norme) est donc : $v = \frac{d\ell}{dt_{\ell oc}} = -C\ \frac{dr}{dt} = -C\ \frac{R}{T} = c\sqrt{1 - \frac{A}{A_0}}$.
• On constate que la vitesse de chute tend vers c quand $r \to r_s$. On peut alors se demander s'il est possible que le point continue son mouvement au delà de cette limite ; cela poserait problème pour $r < r_s$ car $A = 1 - \frac{r_s}{r}$ deviendrait alors négatif, ce qui correspondrait à $v > c$. C'est l'hypothèse qui est faite dans l'interprétation “classique”, supposant que c'est le repérage statique qui devient alors inadapté : $v > c$ par rapport à ce dernier importe peu.





• Il faut toutefois aussi considérer l'interprétation “isotrope” : lorsque le mobile se rapprochant de l'astre dépasse la limite, la variable r change de sens de variation et augmente. Ainsi A redevient positif et, sous l'effet de ce qui devrait être l'attraction de l'astre, le mobile ralentit !
◊ remarque : l'expression de v en fonction de A n'est pas modifiée, car de même C reste positif et dans ce cas : $d\ell = \sqrt{C}\, dr$ et $R = \sqrt{A_0 - A}$.
• Ceci montre que, même si la variable r “classique” semble parfois incompatible avec $\underline{r}$ “isotrope”, on peut l'utiliser judicieusement comme variable intermédiaire pour en déduire les mêmes résultats qu'avec $\underline{r}$ (ici rien n'implique que l'une des deux soit à proscrire).

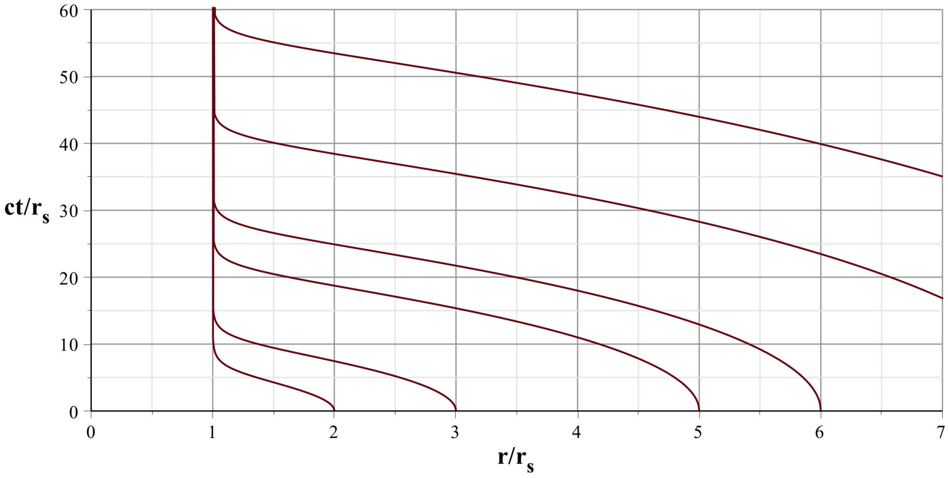
3.a. • Pour un point matériel initialement à la vitesse centripète v_0 (en norme) : $\frac{1}{\sqrt{C_0}}\, dr = -v_0 \sqrt{A_0}\, dt$; $ds = \sqrt{A_0}\ c\, dt \sqrt{1-\beta_0^2}$; $T_0 = \frac{1}{c\sqrt{A_0}\sqrt{1-\beta_0^2}}$; finalement : $T\, A = T_0\, A_0 = \frac{\sqrt{A_0}}{c\sqrt{1-\beta_0^2}}$.
• En reportant l'expression de T dans la métrique : $c\, dt = \frac{\sqrt{A_0}}{A\sqrt{1-\beta_0^2}}\, ds$; $ds^2 \left(\frac{A_0}{A.(1-\beta_0^2)} - 1\right) = C\, dr^2$ et finalement : $R^2 = \frac{A_0}{1-\beta_0^2} - A$.

3.b. • La durée locale, mesurée par un observateur <u>immobile</u>, est telle que : $ds^2 = c^2\, dt_{\ell oc}^2$, c'est à dire : $dt_{\ell oc} = \sqrt{A}\, dt$.
• La distance parcourue est : $d\ell = -\sqrt{C}\, dr$ (on considère un mouvement centripète) ; la vitesse (en norme) est donc : $v = \frac{d\ell}{dt_{\ell oc}} = -C\ \frac{dr}{dt} = -C\ \frac{R}{T} = c\sqrt{1 - \frac{A.(1-\beta_0^2)}{A_0}}$. Les conclusions sont analogues.
◊ remarque : la singularité pour $r = r_s$ est souvent nommée “horizon” ; ce terme est ambigu : un horizon semble “reculer” au fur et à mesure qu'on s'en approche ; il ne s'agit pas plus d'un “horizon” dans l'espace des vitesses, car il ne semble pas plus éloigné quand on s'en approche plus vite (la limite est toujours c).

VII. Point matériel en chute libre

1. • En combinant les deux équations, on obtient : $v^2 = \frac{C}{A}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2\left(1 - \frac{A}{k^2}\right)$.
• Dans les conditions initiales : $0 = c^2\left(1 - \frac{A_0}{k^2}\right)$ en notant $A_0 = A(r_0)$. Ceci impose $k^2 = A_0$ puis finalement : $v = c\sqrt{1 - \frac{A}{A_0}}$.

2.a. • On obtient : $\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = A_0 - A = \frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{r_0}$; $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{A^2\, c^2}{A_0}(A_0 - A) = c^2\, \frac{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2}{1-\frac{r_s}{r_0}}\left(\frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{r_0}\right)$.
• En prenant r_s et $\frac{r_s}{c}$ comme unités : $t(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{r}{r-1}\sqrt{\frac{r.(r_0-1)}{r_0-r}}\, dr$. Ceci donne une durée de chute infinie quelle que soit la position de départ r_0 .
◊ remarque : ces durées sont calculées avec le “temps à l'infini” ; un observateur fixe situé ailleurs mesure des durées plus faibles $(A < 1)$ mais proportionnelles à celles-ci, donc de même infinies.
• Plus précisément, la représentation graphique montre que c'est l'approche finale de la singularité dont la durée est infinie.

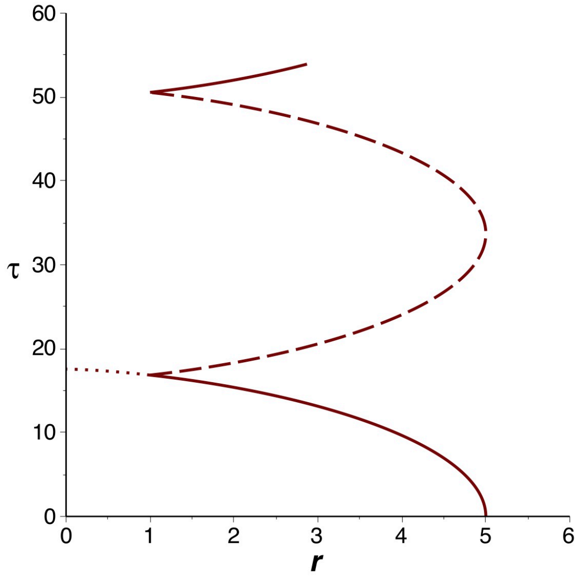


2.b. • On obtient : $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2\left(\frac{r_s}{r} - \frac{r_s}{r_0}\right)$; $\frac{d^2r}{d\tau^2} = -c^2\ \frac{r_s}{2\,r^2}$.

◊ remarque : la seconde forme est plus pratique pour intégrer avec les conditions initiales $\frac{dr}{d\tau} = 0$ pour $r = r_0$, sinon on doit jongler pour éviter d'obtenir la solution constante sans intérêt ici.

• L'intégration numérique (ici en coordonnées réduites) montre que la durée propre de la chute jusqu'à la singularité est finie. Elle n'est par contre pas simple à interpréter : avec l'hypothèse “isotrope”, il faut ne pas prolonger aux valeurs $r < r_s$ (en pointillés), mais avec $r > r_s$ au delà de l'horizon (en tirets).

◊ remarque : le changement de signe discontinu de $\frac{dr}{d\tau}$ peut surprendre, bien qu'il soit logique pour rendre compatible le comportement de la variable r avec celui de $\underline{r}$ “isotrope” ; il vient du fait qu'au niveau de la singularité $d\tau$ s'annule en même temps que dr (la dérivée y est indéterminée et le passage d'une valeur à une autre n'y est pas contradictoire).

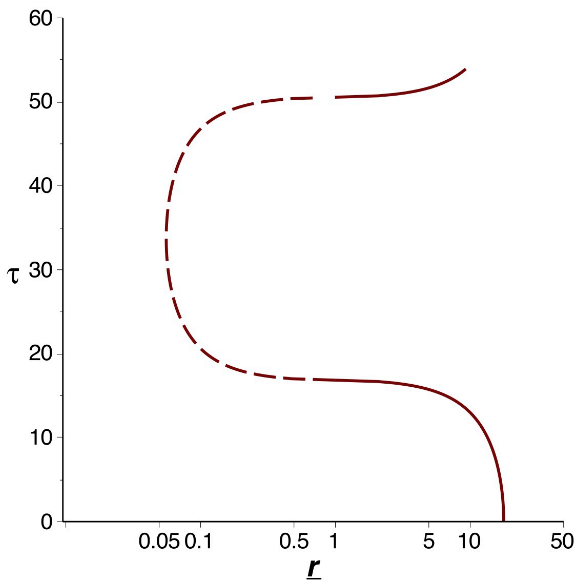


3.a. • On obtient (ici sans détailler A_0 car il n'y a pas de simplification) :

$$\left(\frac{d\underline{r}}{d\tau}\right)^2 = \frac{c^2\,\underline{r}^4}{(\underline{r}+\underline{r}_s)^2}\left(\frac{A_0}{(\underline{r}-\underline{r}_s)^2} - \frac{1}{(\underline{r}+\underline{r}_s)^2}\right) \quad ; \quad \frac{d^2\underline{r}}{d\tau^2} = -\frac{2\,c^2\,\underline{r}_s\,\underline{r}^3}{(\underline{r}+\underline{r}_s)^3}\left(\frac{1}{(\underline{r}+\underline{r}_s)^2} + \frac{\underline{r}_s\,A_0}{(\underline{r}-\underline{r}_s)^3}\right).$$

• On constate effectivement ici un changement de signe de l'accélération au passage de la singularité.

3.b. • On obtient : $\underline{r} = \frac{r}{2}\left(\left(1 - \frac{r_s}{2\,r}\right) \pm \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}\right)$. Par changement de coordonnée, on en déduit le graphique correspondant, plus facile à interpréter (même si une échelle logarithmique s'impose) : on constate effectivement l'effet répulsif de la gravitation dans la zone “intérieure” à la singularité.



• Cela pose toutefois un problème expérimental. Si la particule oscille en un temps propre fini, alors en ressortant elle peut à chaque fois interagir avec un observateur fixe extérieur (ou de même intérieur). Or, un tel observateur fixe ne voit pas une particule qui entre et sort périodiquement puisque, s'il en voit une, elle semble provenir du passé infini et met aussi une durée infinie à retomber : peut-il voir plusieurs exemplaires de la même particule faire le trajet de façon décalée ?

• Si on suppose valide la relativité générale, ces contradictions suggèrent fortement qu'une telle disposition de la singularité est physiquement impossible (en outre, la force de gravitation répulsive dans la zone intérieure semble difficilement permettre qu'une telle métrique puisse être statique).

VIII. Photon en mouvement radial

1.a. • Puisque la trajectoire radiale est connue il suffit d'utiliser la relation $ds^2 = A\,c^2\,dt^2 - C\,dr^2 = 0$ correspondant à : $c\,dt = \pm\sqrt{\frac{C}{A}}\,dr$.

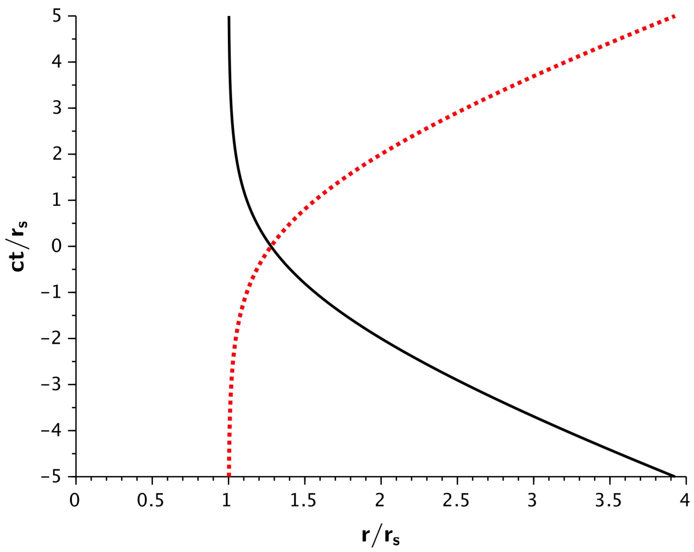
• Avec les coordonnées “classiques”, on obtient ainsi (selon l'interprétation “isotrope”) :

$$c\,dt = \pm\frac{r}{r-r_s}\,dr \quad ; \quad c\,t = \pm\left[r + r_s\,\ln\left(\frac{r-r_s}{r_s}\right)\right] + Cste\ .$$

1.b. • On obtient la représentation graphique ci-après.

• On constate (en noir) que, pour un observateur fixe, un photon semble mettre une durée infinie pour atteindre la singularité ; puis (en pointillé rouge) pour un observateur “intérieur”, il semble mettre à nouveau une durée infinie pour rejoindre l'astre créant la singularité.

• Les photons peuvent “tout autant” sortir, selon les mêmes courbes (sauf que dans ce cas l'approche de la singularité par l'intérieur est en noir et la partie extérieure en pointillé rouge).

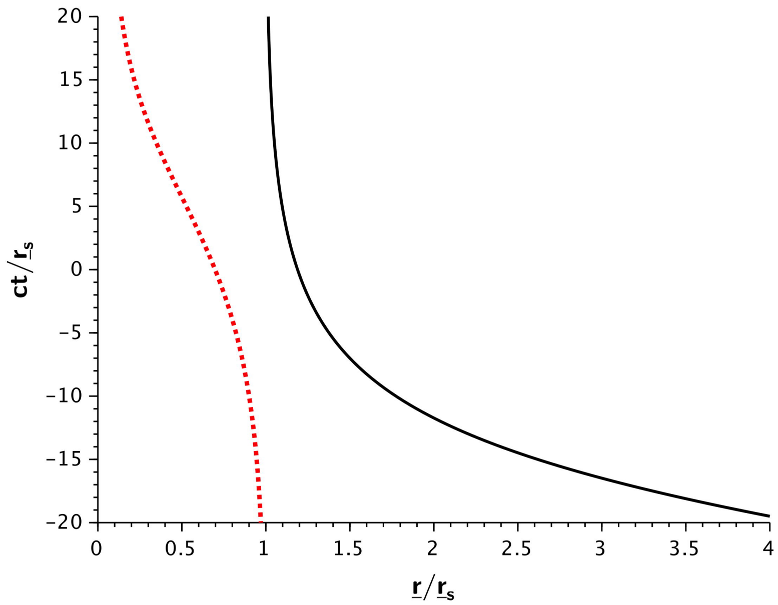


2.a. • Avec les coordonnées “isotropes”, on obtient de même :

$$c\,dt = \pm \frac{(\underline{r}+\underline{r}_s)^3}{\underline{r}^2.(\underline{r}-\underline{r}_s)}\,dr \quad ; \quad c\,t = \pm\left[\frac{(\underline{r}+\underline{r}_s)^2}{\underline{r}} + 4\,\underline{r}_s\,\ln\left(\frac{(\underline{r}-\underline{r}_s)^2}{\underline{r}\;\underline{r}_s}\right)\right] + Cste\ .$$

◊ remarque : on peut intégrer ou utiliser le changement de notation : $r = \frac{(\underline{r}+\underline{r}_s)^2}{\underline{r}}$.

2.b. • On obtient la représentation graphique suivante.

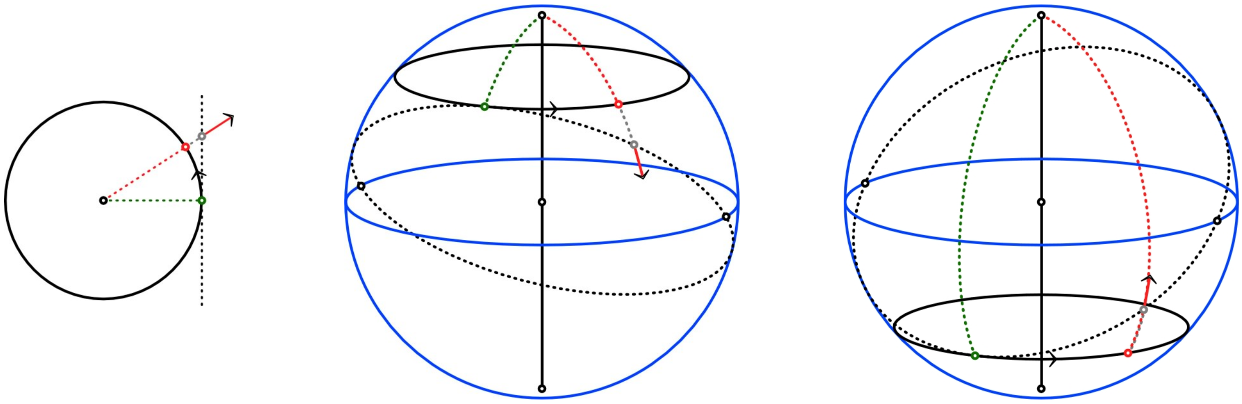


• On constate (en noir) qu'un photon semble mettre une durée infinie pour atteindre la singularité ; il semble mettre ensuite (en pointillé rouge) à nouveau une durée infinie pour rejoindre l'astre intérieur créant la singularité.
• Les photons peuvent “tout autant” sortir, selon des courbes analogues, symétriques par rapport à l'axe horizontal.
• L'impossibilité de raccorder les deux partie du mouvement peut sembler contradictoire ; en fait la variable nommée t n'est pas la même de part et d'autre de la divergence (ou pourrait utiliser des noms différents) : une même valeur de t de part et d'autre de la singularité ne correspond pas à un même instant.

IX. Gravitation “répulsive”

• En mécanique newtonienne, si on raisonne en suivant la particule en orbite circulaire, la force attractive est équilibrée par une force centrifuge.

• L'effet décrit par la force centrifuge découle de l'écart du mouvement par rapport aux géodésiques d'espace. Dans un plan, l'écart d'un mouvement circulaire par rapport à la tangente (géodésique rectiligne) est décrit par une force centrifuge (qui tend à éloigner la particule du cercle). L'effet est tout à fait semblable sur la surface d'une sphère pour un mouvement circulaire de rayon modéré. Par contre il est inversé si le rayon du cercle (distance au centre) est assez grand pour que son périmètre redevienne plus petit que celui de la sphère : la force “centrifuge” devient “centripète”.



• Dans le cas de la métrique de Schwarzschild avec l'interprétation “isotrope”, une inversion analogue se produit pour $r < r_s$: la “force” de gravitation (interprétée comme un effet inertiel en relativité générale) semble répulsive.

X. Particules en chute libre verticale

1. • Pour la chute : $v = -c\sqrt{1-\frac{A}{A_0}} = \frac{dr}{A\,dt}$.

• Ainsi (avec r_s comme unité) : $c\,dt = -\frac{\sqrt{A_0}\,dr}{A\sqrt{A_0-A}} = -\sqrt{r_0-1}\,\frac{r^2\,dr}{(r-1)\sqrt{r.(r_0-r)}}$.

• En décomposant : $\frac{r^2}{r-1} = r+1+\frac{1}{r-1} = -\frac{1}{2}\,(-2\,r+r_0)+\left(1+\frac{r_0}{2}\right)+\frac{1}{r-1}$ on peut écrire :

$$\frac{r^2}{(r-1)\sqrt{r.(r_0-r)}}\,dr = -\frac{1}{2}\,\frac{-2\,r+r_0}{\sqrt{r.(r_0-r)}}\,dr+\left(1+\frac{r_0}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{r.(r_0-r)}}\,dr+\frac{1}{(r-1)\sqrt{r.(r_0-r)}}\,dr\ .$$

◊ remarque : dans le premier terme, on fait apparaître la dérivée du polynôme du radical.

• On obtient ainsi : $-\frac{1}{2}\,\frac{-2\,r+r_0}{\sqrt{r.(r_0-r)}}\,dr = -d\left(\sqrt{r\,.(r_0-r)}\right)$.

• En passant par $x = \frac{-2\,r+r_0}{r_0}$ on obtient : $\frac{1}{\sqrt{r.(r_0-r)}}\,dr = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d\left(\arcsin\left(1-\frac{2\,r}{r_0}\right)\right)$.

◊ remarque : dans ce terme on choisit la dérivée du polynôme du radical, divisée par la racine carrée de son discriminant (astuce “classique”, mais on peut retrouver par tâtonnement).

• Pour $r-1>0$, on peut par ailleurs passer par $x = \frac{1}{r-1}$, donnant :

$$\frac{1}{(r-1)\sqrt{r.(r_0-r)}}\,dr = -\frac{dx}{\sqrt{(r_0-1)\,x^2+(r_0-2)\,x-1}}\ .$$

• En reprenant la méthode du terme précédent, on passe par $y = \frac{2\,(r_0-1)\,x+(r_0-2)}{r_0}$, donnant :

$$\frac{1}{(r-1)\sqrt{r.(r_0-r)}}\,dr = -\frac{1}{\sqrt{r_0-1}}\,\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{r_0-1}}\,d\left(\mathrm{arcosh}\left(\frac{r_0\,r-2\,r+r_0}{r_0.(r-1)}\right)\right)\ .$$

• Cette expression suppose $\frac{r_0\,r-2\,r+r_0}{r_0.(r-1)} > 1$, d'où en simplifiant $r < r_0$, ce qui est toujours vrai. Par contre, pour $r<1$, le changement de signe impliquerait $r > r_0$, ce qui est impossible.

• Pour $r-1<0$, on peut alors de même utiliser $x = \frac{1}{1-r}$, donnant :

$$\frac{1}{(r-1)\sqrt{r.(r_0-r)}}\,dr = -\frac{dx}{\sqrt{(r_0-1)\,x^2-(r_0-2)\,x-1}}\ .$$

• Avec la même méthode, on passe par $y = \frac{2\,(r_0-1)\,x-(r_0-2)}{r_0}$, donnant :

$$\frac{1}{(r-1)\,\sqrt{r.(r_0-r)}}\,dr = -\frac{1}{\sqrt{r_0-1}}\,\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{r_0-1}}\,d\left(\operatorname{arcosh}\left(\frac{r_0\,r-2\,r+r_0}{r_0.(1-r)}\right)\right).$$

• Cette expression suppose $\frac{r_0\,r-2\,r+r_0}{r_0.(1-r)} > 1$, d'où en simplifiant $r_0 > 1$, ce qui est toujours vrai.

• Au total : $c\,t = \sqrt{r_0-1}\,\sqrt{r\,.(r_0-r)} + \left(1+\frac{r_0}{2}\right)\sqrt{r_0-1}\,\arcsin\left(1-\frac{2\,r}{r_0}\right) + \operatorname{arcosh}\left(\frac{r_0\,r-2\,r+r_0}{r_0.|r-1|}\right) + Cste$.

• On veut que $c\,t = 0$ corresponde au passage par $r = r_0$:

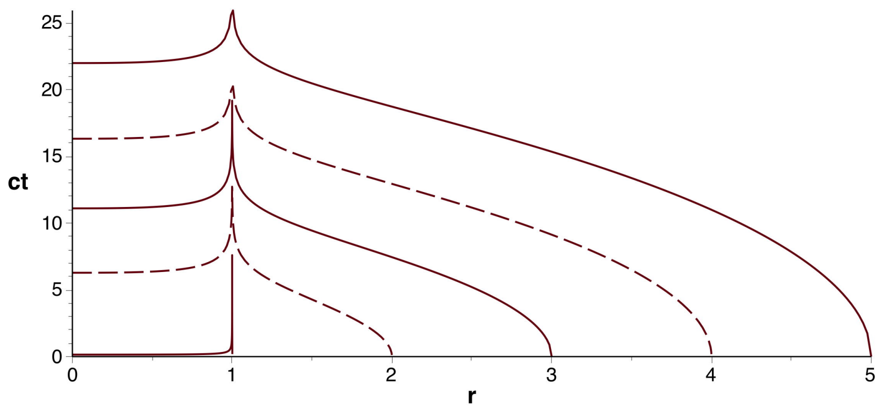
$$0 = \left(1+\frac{r_0}{2}\right)\sqrt{r_0-1}\,\arcsin(-1) + Cste \;\;;\;\; Cste = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{r_0}{2}\right)\sqrt{r_0-1}\,.$$

• On peut alors simplifier car $\arcsin\left(1-\frac{2\,r}{r_0}\right) + \frac{\pi}{2} = \arccos\left(\frac{2\,r}{r_0}-1\right)$; ainsi :

$$c\,t = \sqrt{r_0-1}\,\sqrt{r\,.(r_0-r)} + \left(1+\frac{r_0}{2}\right)\sqrt{r_0-1}\,\arccos\left(\frac{2\,r}{r_0}-1\right) + \operatorname{arcosh}\left(\frac{r_0\,r-2\,r+r_0}{r_0.|r-1|}\right).$$

◊ remarque : étant donné que l'expression diverge pour $r = 1$, il est impossible de raccorder par continuité à ce niveau, donc la constante d'intégration pour $r < 1$ peut être différente de celle imposée en $r = r_0 > 1$; le problème est analogue au prolongement de $\ln(|z|)$ comme primitive de $\frac{1}{z}$ pour $z < 0$; le passage par les complexes donne d'ailleurs $\ln(|z|) + \ln(-1) = \ln(|z|) + \mathrm{i}\,\pi \mod(2\,\mathrm{i}\,\pi)$.

2. • On obtient les variations suivantes (avec asymptotes pour $r = 1$) pour quelques valeurs de r_0 .



XI. Photons en mouvement vertical

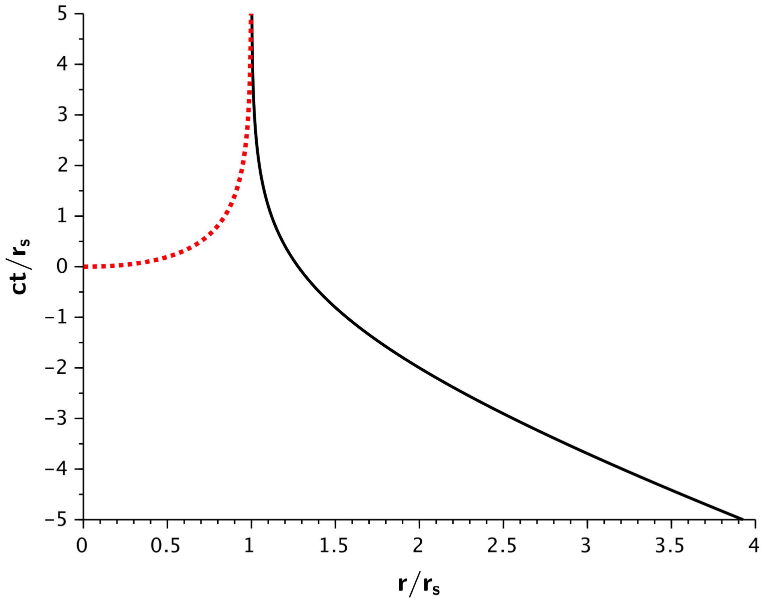
1. • Puisque la trajectoire radiale est connue il suffit d'utiliser la relation $ds^2 = A\,c^2\,dt^2 - C\,dr^2 = 0$ correspondant à : $c\,dt = \pm\sqrt{\frac{C}{A}}\,dr$.

• Avec les coordonnées “classiques”, on obtient ainsi (selon l'interprétation “classique”) :

$$c\,dt = \pm\frac{r}{r-r_s}\,dr \;\;;\;\; c\,t = \pm\left[r + r_s\,\ln\left(\left|\frac{r-r_s}{r_s}\right|\right)\right] + Cste\,.$$

• On obtient ici encore, pour $r < r_s$, une constante comportant une partie complexe $\mathrm{i}\,\pi \mod(2\,\mathrm{i}\,\pi)$.

2. • On obtient la représentation graphique ci-après.
• On constate (en noir) qu'un photon semble mettre une durée infinie pour atteindre la singularité ; il semble mettre ensuite (en pointillé rouge) à nouveau une durée infinie pour rejoindre l'astre intérieur créant la singularité.
• Les photons peuvent “tout autant” sortir, selon des courbes analogues, symétriques par rapport à l'axe horizontal.


ct/r_s
r/r_s
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4