INTERPRÉTATION DU CHAMP SPHÉRIQUE EXTÉRIEUR - exercices

I. Comportement étrange des coordonnées “isotropes”

• On considère un astre créant dans le vide environnant un champ statique à symétrie sphérique. La métrique “classique” peut s'écrire : $ds^2 = A(r)\ c^2\ dt^2 - C(r)\ dr^2 - r^2\ d\Omega^2$ avec $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)\ d\varphi^2$; $A(r) = \frac{1}{C(r)} = 1 - \frac{r_s}{r}$.

• On peut aussi utiliser la forme “isotrope” : $ds^2 = A(\underline{r})\ c^2\ dt^2 - \underline{C}(\underline{r})\ \left(d\underline{r}^2 + \underline{r}^2\ d\Omega^2\right)$. Compte tenu de l'équivalence $r \approx \underline{r}$ à l'infini, la concordance des deux métriques impose : $r = \underline{r}\,.\left(1 + \frac{\underline{r_s}}{\underline{r}}\right)^2$ avec $\underline{r_s} = \frac{r_s}{4}$. On obtient ensuite : $A(\underline{r}) = \frac{(\underline{r}-\underline{r_s})^2}{(\underline{r}+\underline{r_s})^2}$ et $\underline{C}(\underline{r}) = \left(1 + \frac{\underline{r_s}}{\underline{r}}\right)^4$.

• Une propriété importante est que $r(\underline{r})$ passe par un minimum $(r = r_s)$ pour $\underline{r} = \underline{r_s}$. Ceci évite, respectivement pour $A(\underline{r})$ et $\underline{C}(\underline{r})$, le changement de signe comme pour $A(r)$ ainsi que la divergence comme pour $C(r)$.

◊ remarque : dans ce cas particulier les deux effets sont liés car $C = \frac{1}{A}$ en notations “classiques” ; cela est usuellement considéré comme conséquence d'une transformation de Lorentz supraluminique.

1. • D'autres coordonnées radiales peuvent avoir des propriétés semblables, on peut par exemple proposer $\tilde{r}$ telle que : $r = \tilde{r}\,.\left(1 + \frac{\tilde{r}_s{}^2}{\tilde{r}^2}\right)$.
   a) Déterminer la valeur de la constante $\tilde{r}_s$.
   b) Déterminer la métrique correspondante : $ds^2 = A(\tilde{r})\ c^2\ dt^2 - \tilde{C}(\tilde{r})\ d\tilde{r}^2 - D(\tilde{r})\ d\Omega^2$; commenter.

2. • Inversement, on peut chercher des coordonnées radiales évitant le changement de signe de A, ce qui nécessite un minimum ; on peut proposer $\tilde{r}$ (différente de la précédente) telle que : $A(\tilde{r}) = \left(1 - \frac{\tilde{r}_s}{\tilde{r}}\right)^2$.
   a) Déterminer la valeur de la constante $\tilde{r}_s$.
   b) Déterminer la métrique correspondante : $ds^2 = A(\tilde{r})\ c^2\ dt^2 - \tilde{C}(\tilde{r})\ d\tilde{r}^2 - D(\tilde{r})\ d\Omega^2$; commenter.

II. Distances radiales

1. a) On considère un astre décrit par la métrique “classique” de Schwarzschild ; exprimer la distance spatiale ρ en fonction de r : $d\ell = \pm\sqrt{\frac{r}{r-r_s}}\ dr = d\rho$ (en nommant ρ cette longueur).
   b) Ceci peut-il se généraliser pour $r < r_s$?

2. a) Exprimer de même la distance spatiale ρ en fonction de $\underline{r}$ “isotrope” : $d\ell = \left(1 + \frac{\underline{r_s}}{\underline{r}}\right)^2 d\underline{r} = d\rho$.
   b) Comparer les deux descriptions de ρ , en particulier pour ce qui concerne $r < r_s$ et/ou $\underline{r} < \underline{r_s}$.

III. Métrique “artificiellement” divergente

1. • On part d'une métrique : $ds^2 = c^2\ dt^2 - d\rho^2 - \rho^2\ d\Omega^2$ (décrivant un espace plat). On applique ensuite un changement de notation : $\rho = \sqrt{r^2 - a^2}$ (où a est une constante).
   a) Établir inversement l'expression de $r(\rho)$; en tracer une représentation graphique.
   b) Établir l'expression de $d\rho$ en fonction de r et dr ; en déduire l'expression de la métrique.
   c) Justifier que la divergence pour $r = a$ n'est qu'apparente ; considérer en particulier le cas d'un point matériel en mouvement uniforme radial vers l'origine et dépassant la limite $r = a$.

2. • On applique maintenant un changement de notation : $\rho = a + \sqrt{r^2 - a^2}$.
   a) Établir inversement l'expression de $r(\rho)$; en tracer une représentation graphique.
   b) Établir l'expression de $d\rho$ en fonction de r et dr ; en déduire l'expression de la métrique.

c) Justifier que la divergence pour $r = a$ n'est qu'apparente, mais qu'elle pose ici une réelle difficulté d'interprétation ; considérer en particulier le cas d'un point matériel en mouvement uniforme radial vers l'origine et dépassant la limite $r = a$.

IV. Métrique “artificiellement” divergente

1. • On considère les différentes métriques statiques : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - D(r)\, d\Omega^2$ pour lesquelles il intervient une divergence de $C(r)$.

• Justifier qu'un premier cas de telle divergence, qu'on peut nommer “asymptotique” (d'après la représentation graphique de la distance spatiale en fonction des variables de la variable radiale), correspond au cas de $\underline{C}(\underline{r}) = \left(1 + \frac{r_s}{\underline{r}}\right)^4$ pour $\underline{r} \to 0$ en coordonnées isotropes.

2. • Montrer qu'un second cas, qu'on peut nommer “point d'inflexion”, peut être expliqué en partant de la droite réelle, décrite par la coordonnée cartésienne x avec la métrique euclidienne, puis en effectuant le changement de variable $\eta = \frac{x^3}{\alpha^2}$ (qui permet de décrire l'ensemble de la droite réelle) où α est une longueur constante arbitraire servant à faire correspondre les unités.

3. a) Montrer qu'un troisième cas, qu'on peut nommer “extremum”, peut être expliqué en partant de la droite réelle, décrite par la coordonnée cartésienne x avec la métrique euclidienne, puis en effectuant le changement de variable $\xi = \frac{x^2}{\alpha}$ (qui ne peut décrire l'ensemble de la droite réelle qu'en adoptant une démarche permettant de distinguer des valeurs identiques de ξ correspondant à des valeurs de x de signes contraires).

b) Justifier que ce cas semble être celui qui correspond à la divergence de $C(r)$ pour $r = r_s$ en coordonnées “classiques” de Schwarzschild.

V. Point matériel en chute libre

1. • On raisonne dans le champ d'un astre à symétrie sphérique, en coordonnées “isotropes”.

a) Écrire les équations d'une chute libre verticale pour un point matériel initialement immobile.

b) en déduire par intégration $\frac{dt}{ds}$ et $\frac{dr}{ds}$.

2. a) Exprimer la durée locale $dt_{\ell oc}$ (mesurée par un observateur <u>immobile</u>) et la distance parcourue $d\ell$.

b) En déduire la vitesse : $v = \frac{d\ell}{dt_{\ell oc}}$; commenter.

VI. Point matériel en chute libre

1. • On raisonne dans le champ d'un astre à symétrie sphérique, en coordonnées “classiques”.

a) Écrire les équations d'une chute libre verticale pour un point matériel initialement immobile.

b) En déduire par intégration $\frac{dt}{ds}$ et $\frac{dr}{ds}$.

2. a) Exprimer la durée locale $dt_{\ell oc}$ (mesurée par un observateur <u>immobile</u>) et la distance parcourue $d\ell$.

b) En déduire la vitesse : $v = \frac{d\ell}{dt_{\ell oc}}$; commenter.

3. a) Déterminer de même par intégration $\frac{dt}{ds}$ et $\frac{dr}{ds}$ dans le cas d'un mobile de vitesse initiale v_0 .

b) En déduire la vitesse : $v = \frac{d\ell}{dt_{\ell oc}}$; commenter.

VII. Point matériel en chute libre

• On raisonne dans le champ d'un astre statique à symétrie sphérique, avec une coordonnée radiale “quelconque”. La métrique limitée au plan $\theta = \frac{\pi}{2}$ peut s'écrire : $ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2$.

• Les équations du mouvement d'un point matériel correspondent à :

$A\, c \frac{dt}{ds} = \mathcal{k} = Cste$ (ceci est lié à la conservation de l'énergie) ; $\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{\mathcal{k}^2}{A\, C} - \frac{1}{C}$.

1. • Exprimer la vitesse v de chute, pour un point initialement immobile en r_0 .

2. • Pour les coordonnées “classiques”, on obtient : $A = 1 - \frac{r_S}{r} = \frac{1}{C}$ avec $r_S = \frac{2\,\mathcal{G}\,M}{c^2}$.

a) Préciser la relation donnant $\frac{dr}{dt}$ dans ce cas. En déduire par intégration (numérique) la durée nécessaire pour que le point matériel atteigne la singularité.

b) Préciser la relation donnant $\frac{dr}{d\tau}$ puis celle donnant $\frac{d^2r}{d\tau^2}$ (plus pratique à utiliser). En déduire par intégration (numérique) la durée propre nécessaire pour que le point matériel atteigne la singularité.

3. • Pour les coordonnées “isotropes”, on obtient : $A = \frac{(\underline{r}-\underline{r}_S)^2}{(\underline{r}+\underline{r}_S)^2}$ et $\underline{C} = \left(\frac{\underline{r}+\underline{r}_S}{\underline{r}}\right)^4$ avec $\underline{r}_S = \frac{r_S}{4}$.

a) Préciser les relations donnant $\frac{dr}{d\tau}$ et $\frac{d^2r}{d\tau^2}$ dans ce cas. Commenter.

b) Les équations obtenues ne permettent pas une intégration numérique assez précise au voisinage de la singularité. Utiliser la propriété $\frac{d\underline{r}^2}{\underline{r}^2} = C\, \frac{dr^2}{r^2}$ pour en déduire les résultats à partir de l'intégration obtenue en fonction de r . Commenter.

VIII. Photon en mouvement radial

• On raisonne dans le champ d'un astre statique à symétrie sphérique.

1. • Avec les coordonnées “classiques” dans l'interprétation “isotrope” on peut utiliser $A = 1 - \frac{r_S}{r} = \frac{1}{C}$.

a) Établir les équations du mouvement radial d'un photon.
b) Représenter graphiquement et commenter.

2. • Avec les coordonnées “isotropes” on peut utiliser $A = \frac{(\underline{r}-\underline{r}_S)^2}{(\underline{r}+\underline{r}_S)^2}$ et $\underline{C} = \left(\frac{\underline{r}+\underline{r}_S}{\underline{r}}\right)^4$ où $\underline{r}_S = \frac{r_S}{4}$.

a) Établir les équations du mouvement radial d'un photon.
b) Représenter graphiquement et commenter.

IX. Gravitation “répulsive”

• En raisonnant comme en mécanique newtonienne, mais dans un espace courbe, montrer que la “force centrifuge” peut devenir centripète dans certaines configurations spatiales.

• En se basant sur l'interprétation inertielle de la gravitation (caractérisant la relativité générale), montrer que cela justifie qu'au delà de l'horizon les coordonnées “isotropes” semblent faire intervenir un aspect gravitationnel répulsif.

X. Particules en chute libre verticale

• On considère une particule en chute libre verticale, à partir d'une position $r_0 > r_s$ à l'instant $t = 0$, avec une vitesse initiale nulle. Dans ce cas, avec les notations de Schwarzschild, la vitesse de chute peut s'écrire : $v = -c\sqrt{1 - \frac{A}{A_0}}$ où $A_0 = A(r_0)$.

1. • Montrer qu'on peut en déduire l'expression $c\,t(r)$ pour r_0 fixé.

2. • Représenter graphiquement ces variations.

XI. Photons en mouvement vertical

• On raisonne dans le champ d'un astre statique à symétrie sphérique ; avec les coordonnées “classiques” on peut utiliser $A = 1 - \frac{r_s}{r} = \frac{1}{C}$.

1. • Établir les équations du mouvement radial d'un photon (dans l'interprétation “classique”).

2. • Représenter graphiquement et commenter.