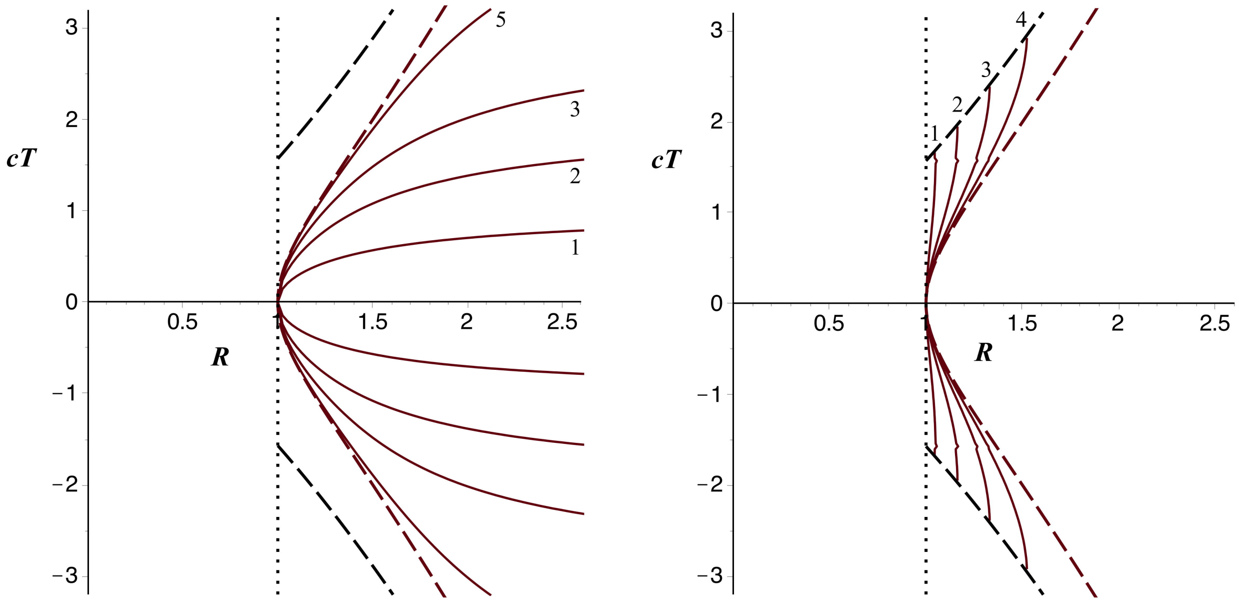
MÉTRIQUE À LA NOVIKOV - INTERPRÉTATION - corrigé des exercices

I. Métrique à la Novikov

1. • Pour les régions $r > r_s$ on peut utiliser le fait que l'axe $T = 0$ correspond à $t = 0$ et on applique la même méthode que pour la métrique de Novikov, avec (en notations réduites) :

$$r = \frac{R}{2}\,[1 - \cos(\eta)] \;\;;\;\; c\,T = \frac{R^{3/2}}{2}\,[\pi - \eta + \sin(\eta)]\ .$$



2.a. • Pour $r < r_s$ cette méthode ne fonctionne pas puisqu'il est impossible de dépasser la limite $r = r_s$ pour laquelle t diverge. Elle permet par contre de montrer que $R = r_s$ correspond aussi à $t = 0$ (ici on n'a pas l'argument de symétrie par rapport à $R = 0$), permettant ensuite un raisonnement avec $T = Cste$.

• Pour une valeur constante de R , la métrique donne : $A\,c^2\,dt^2 - \frac{1}{A}\,dr^2 = c^2\,dT^2$.

• Avec $\dot{r}^2 = \cancel{\mathcal{E}} + \frac{F}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$ on obtient $c^2\,dT^2 = \frac{R\,r}{R-r}\,dr^2$; $A\,c^2\,dt^2 = dr^2 .\left[\frac{r}{r-1} + \frac{R\,r}{R-r}\right]$. Donc pour $R = r_s$ ceci donne : $dt = 0$.

• Cette méthode avec $T = Cste$ ne peut toutefois pas dépasser $T = T_0(R = r_s) = \frac{\pi}{2}$ (on ne peut pas partir d'un point sur l'axe avec $r < 0$). Pour prolonger les courbes au delà, on peut calculer $t(R,T)$ le long de la courbe $r = 0$: $c\,T = \frac{\pi}{2}\,R^{3/2}$.

• Pour $r = Cste$ (a priori non nulle) la métrique donne : $A\,c^2\,dt^2 = c^2\,dT^2 - \frac{R}{R-1}\,r'^2(R,T)\,dR^2$.

• Mais par ailleurs : $dr = \dot{r}\,dT + r'\,dR = 0$, donc : $A\,c^2\,dt^2 = c^2\,dT^2 - \frac{R}{R-1}\,\dot{r}^2(R,T)\,dT^2$.

• Avec (en notations réduites) : $A = \frac{r-1}{r}$; $\dot{r}^2 = \cancel{\mathcal{E}} + \frac{F}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$ on obtient ensuite :

$$dt^2 = dT^2\,\frac{r}{r-1}\left[1 - \frac{R}{R-1}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\right] = \frac{R}{R-1}\,dT^2\ .$$

• À la limite $r = 0$, avec $c\,T = \frac{\pi}{2}\,R^{3/2}$, ceci donne : $c\,dt = \frac{3\pi}{4}\,\frac{R}{\sqrt{R-1}}\,dR$.

• On obtient : $c\,t = \frac{\pi}{2}\,(R+2)\,\sqrt{R-1}$ (compte tenu de $t = 0$ pour $R = 1$).

2.b. • Pour une valeur constante de T la métrique donne :

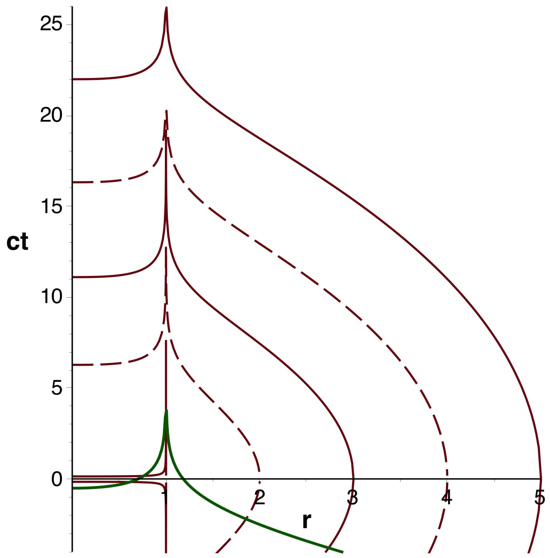
$$A\,c^2\,dt^2 - \frac{1}{A}\,dr^2 = -\frac{R}{R-1}\,r'^2(R,T)\,dR^2 = -\frac{R}{R-1}\,dr^2\ .$$

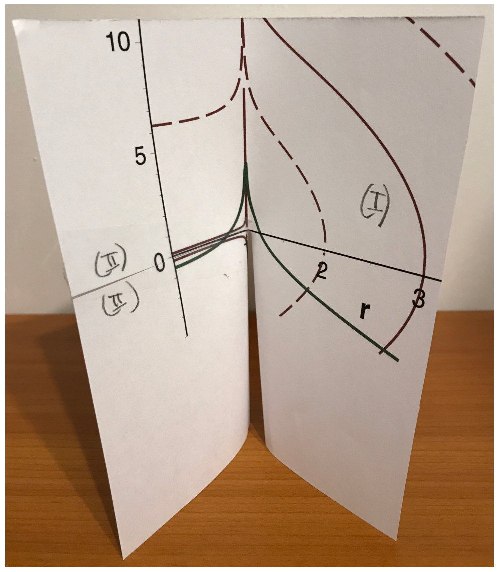
• On applique la même méthode que pour la métrique de Novikov : pour $c\,T \leq \frac{\pi}{2}$ fixé, on augmente progressivement R à partir de r_s (en augmentant η) jusqu'à atteindre une valeur choisie de t .

• Pour $c\,T > \frac{\pi}{2}$ fixé, on procède de même en partant de $R_0 = \left(\frac{2\,c\,T}{\pi}\right)^{2/3}$ et $c\,t_0 = \frac{\pi}{2}\,(R_0 + 2)\,\sqrt{R_0 - 1}$.

II. Diagramme de Novikov en représentation de Schwarzschild

• Pour obtenir une représentation équivalente au diagramme de Novikov (ou de Kruskal-Szekeres), on peut dessiner deux exemplaires de la famille de courbes de référence en notations de Schwarzschild.





• On coupe ensuite les deux dessins selon la limite $0 \leq r \leq r_s$; $t = 0$. Puis on les superpose et on raccorde la moitié supérieure de la coupure du premier feuillet avec la moitié inférieure de la coupure du second et réciproquement.
◊ remarque : on peut a priori penser qu'il faut pour cela que les deux feuillets se traversent mutuellement, mais il suffit de plier les feuilles pour l'éviter.
• On obtient ainsi une représentation équivalente, dans laquelle les croisements intempestifs sont évités. Au lieu de finir sa chute du côté montant (donc dans le sens de T , ou v , décroissant), le photon dessiné la finit dans le feuillet “côté obscur” où toutes les particules de référence se déplacent en sens inverse (contraire par rapport à t de Schwarzschild), donc où elles sont aussi dans le sens de la chute.
◊ remarque : symétriquement de l'autre côté, on obtient une représentation d'un photon qui sort de la région (IV) vers la région (III).
• Outre les croisements intempestifs, ceci évite le sens anormal par rapport à T ou v (dans le sens d'évolution des particules de référence), mais au prix d'imposer un sens anormal par rapport à t .

III. Diagramme de Novikov (ou Kruskal-Szekeres) et diagramme de Schwarzschild (ou Lemaître)

1. • Pour obtenir une représentation de Lemaître, le plus simple est de calculer en notations de Schwarzschild.

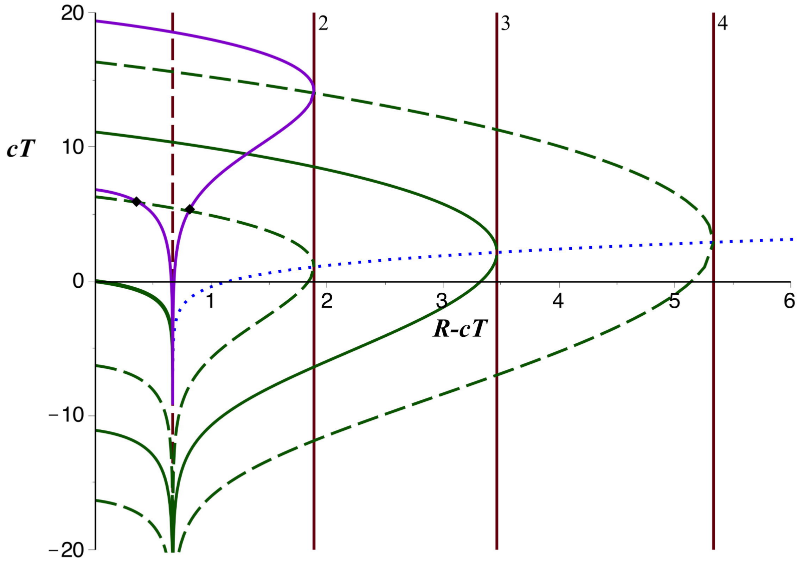
• La chute verticale depuis r_0 avec une vitesse initiale nulle donne : $v = -c\sqrt{1 - \frac{A}{A_0}} = \frac{dr}{A\,dt}$.

• Ainsi (avec r_s comme unité) : $c\,dt = -\sqrt{r_0 - 1}\,\frac{r^2\,dr}{(r-1)\,\sqrt{r.(r_0-r)}}$; l'intégration donne :

$$c\,t = \sqrt{r_0 - 1}\,\sqrt{r.(r_0 - r)} + \left(1 + \frac{r_0}{2}\right)\sqrt{r_0 - 1}\,\left[\arcsin\left(1 - \frac{2\,r}{r_0}\right) + \frac{\pi}{2}\right] + \operatorname{arcosh}\left(\frac{r_0\,r - 2\,r + r_0}{r_0.|r-1|}\right) .$$

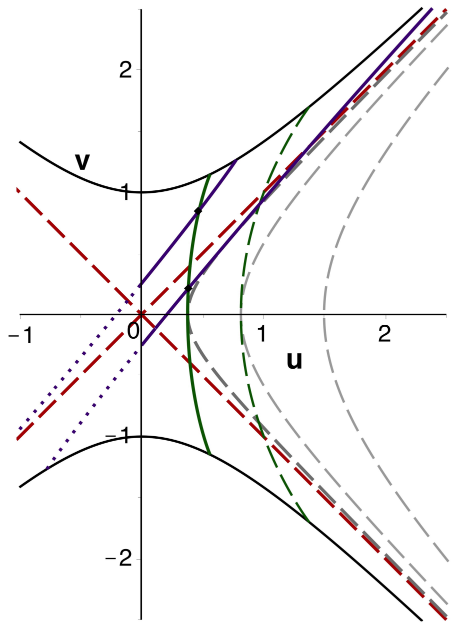
• Avec $c\,t = c\,T - 2\sqrt{r} + \ln\left(\left|\frac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{r}-1}\right|\right)$ et $R - c\,T = \frac{2}{3}\,r^{3/2}$, on peut obtient une représentation paramétrique des courbes en notations de Lemaître.
• Les graphiques sont toutefois très étirés en biais à $45°$ et de ce fait difficiles à interpréter : pour comparer plusieurs courbes, une grande échelle est nécessaire et les détails sont peu visibles. On obtient une représentation plus efficace en inclinant les graphiques : on trace en abscisse $R - c\,T$; ainsi les droites $r = Cste$ deviennent verticales (et les droites $R = Cste$, qui étaient verticales, deviennent in-

clinées à $-45°$). On peut ensuite augmenter l'échelle verticale pour éviter l'étirement excessif (ce qui incline un peu plus les droites $R = Cste$, ici non représentées).



• En décalant les valeurs de t , on peut tracer (en violet) une trajectoire montant jusqu'à $r_0 = 2\,r_s$, puis redescendant, mais partant de $r = 0$ après $t = 0$. On y constate une double intersection avec la trajectoire analogue (en tirets verts) commençant plus tôt (et atteignant son sommet à $t = 0$).

2. • Le plus simple est ici encore de calculer en notations de Schwarzschild, puis de traduire en notations de Kruskal-Szekeres (équivalentes à celles de Novikov et plus facilement manipulables).
• Ici encore se pose le problème de la représentation très étirée des trajectoires concernées ; on peut le résoudre en choisissant des exemples avec r_0 nettement plus proche de $r = r_s$.
• On peut tracer (en vert) quelques exemples de trajectoires montant jusqu'à $\frac{r_0}{r_s} = 1{,}05\,;1{,}2\,;1{,}5$ (en y passant à $t = 0$) puis redescendant.



• En décalant les valeurs de t , on peut tracer (en violet) une trajectoire montant jusqu'à $r_0 = 1{,}05\,r_s$, puis redescendant, mais partant de $r = 0$ après $t = 0$ (le mouvement est l'analogue de celui représenté dans le diagramme de Lemaître précédent, mais dans cette représentation l'ordre des positions de t pour $r < r_s$ n'est pas évident).

• On y constate une simple intersection avec la trajectoire analogue (en vert) commençant plus tôt et partant de la partie gauche de la région (IV) en “remontant” le temps t de Schwarzschild. Ceci montre bien comment Kruskal et Szekeres “évitent” les croisements intempestifs en détournant les particules du côté “obscur” du diagramme ; l'interprétation modulo π montre en effet le second croisement avec la portion “initiale” correspondante de la trajectoire (en pointillés violets, “remontant” le temps v de Kruskal-Szekeres).
◊ remarque : on retrouve alors en outre que l'ordre des deux croisements n'est pas perçu de la même façon par les deux particules.