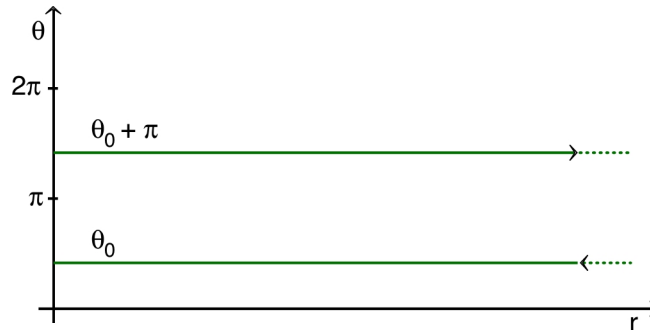


DIAGRAMME DE KRUSKAL-SZEKERES - corrigé des exercices

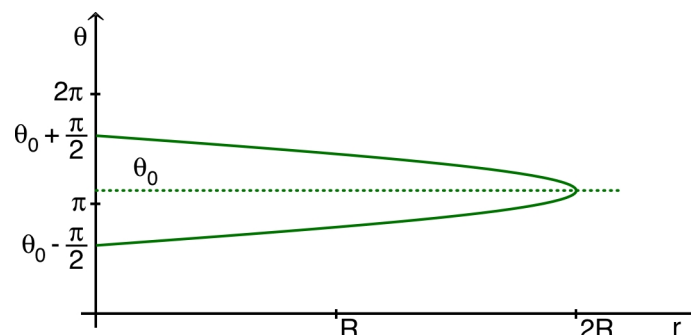
I. Discontinuité d'une coordonnée

- Une demi-droite passant par l'origine a une équation de la forme $\theta = \theta_0$ (constante).
 - Pour une droite, le prolongement de l'autre côté de l'origine correspond alors à la demi-droite d'équation $\theta = \theta_0 + \pi$.



- De façon générale, la forme de la représentation dépend de la méthode graphique choisie. Le fait qu'on obtienne ici des portions de droites est une coïncidence fortuite.
- Par contre, la représentation contient ici une discontinuité qu'il est nécessaire d'interpréter. Cette discontinuité n'est en fait qu'une apparence, car θ est indéterminé pour $r = 0$. Ceci est lié au fait que, sur un cercle de rayon r centré à l'origine, la distance est $d\ell = r d\theta$; ainsi $d\ell = 0$ pour $r = 0$ et modifier θ ne déplace pas le point.
- ◊ remarque : dans ce cas particulier, on peut éviter la discontinuité apparente en utilisant des coordonnées polaires avec $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, \pi]$, mais une telle représentation a d'autres inconvénients, généralement encore plus gênants.

- On peut considérer un cercle de centre (R, θ_0) et de rayon R .
 - En projetant le diamètre sur la direction θ , on obtient l'équation polaire : $r = 2R \cos(\theta - \theta_0)$, avec $\theta \in [\theta_0 - \frac{\pi}{2}; \theta_0 + \frac{\pi}{2}]$.
 - La représentation est donc une portion de sinusoïde (pour simplifier le problème lié à la périodicité angulaire, on choisit $\theta_0 \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$).



- Il est intéressant de remarquer que non seulement la limite pour $r = 0$ présente une discontinuité, mais que la tangente limite (en $r = 0$) à la courbe représentative (sinusoïde) n'est pas la droite (horizontale) représentant la tangente au cercle. À l'approche de la limite, le comportement n'est plus qu'indirectement représentatif : tous les points limites représentent l'origine, chacun de ces points indique la façon (direction) selon laquelle l'origine est atteinte ; deux courbes dont les représentants ont la même limite sont donc tangentes à l'origine.

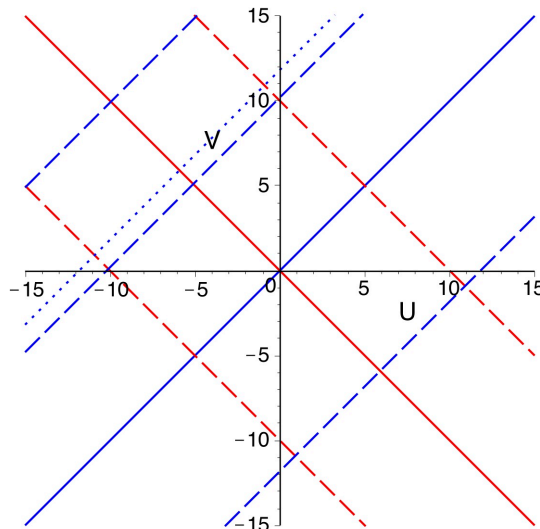
II. Métrique d'Eddington-Finkelstein

1.
 - L'étude de la partie radiale de la métrique ($ds^2 = A c^2 dt^2 - C dr^2$) fait intervenir les symboles de Christoffel suivants : $\Gamma^0_{01} = \frac{A'}{2A}$; $\Gamma^1_{00} = \frac{A'}{2C}$; $\Gamma^1_{11} = \frac{C'}{2C}$.
 - Les équations du mouvement peuvent s'écrire : $\frac{d^2 x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0$, où le paramètre σ peut être le temps propre τ pour les particules massives, mais non pour les photons (il est dans ce cas imposé par le calcul).
 - L'équation pour la variable temporelle $x^0 = c t$ peut s'écrire avec la notation $T = \frac{c dt}{d\sigma}$; on obtient ainsi : $\frac{dT}{d\sigma} + 2 \Gamma^0_{01} T \frac{dr}{d\sigma} = 0$; $A \frac{dT}{d\sigma} + T \frac{dA}{dr} \frac{dr}{d\sigma} = 0$; $A T = \alpha_t = Cste$; $A c dt = \alpha_t d\sigma$.
 - L'équation pour la variable radiale $x^1 = r$ peut s'écrire avec la notation $R = \frac{dr}{d\sigma}$; on obtient ainsi : $\frac{dR}{d\sigma} + \Gamma^1_{00} T^2 + \Gamma^1_{11} R^2 = \frac{dR}{d\sigma} + \frac{A'}{2C} T^2 + \frac{C'}{2C} R^2 = 0$; avec : $AC = 1$; $\frac{C'}{C} = -\frac{A'}{A}$.
 - On peut alors écrire :

$$2 \frac{dR}{d\sigma} + \frac{A'}{A} (A^2 T^2 - R^2) = 2 \frac{dR}{d\sigma} + \frac{A'}{A} (\alpha_t^2 - R^2) = 0 ;$$

$$\frac{2R}{A} \frac{dR}{dr} - \frac{R^2 - \alpha_t^2}{A^2} \frac{dA}{dr} = 0 ; \frac{R^2 - \alpha_t^2}{A} = \alpha_r = Cste ; \text{ ceci impose } R^2 = \alpha_t^2 \text{ pour } r = r_s (A = 0).$$
 - On obtient en fait : $C \cdot \left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 - A \cdot \left(\frac{c dt}{d\sigma}\right)^2 = -\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = \alpha_r$; ceci aurait pu être obtenu directement avec l'expression de ds^2 .
 - ♦ remarque : en particulier $\alpha_r = 0$ pour les photons ; au contraire pour les particules massives σ est un paramètre affine en fonction de s ; on retrouve ainsi la relation entre $c t$ et r .
2.
 - Les relations donnent : $\frac{U+V}{2} = c t$; ainsi : $\frac{dU+dV}{2} = c dt$.
 - On obtient également : $\frac{V-U}{2} = r + r_s \ln\left(\left|\frac{r}{r_s} - 1\right|\right)$; $\frac{dV-dU}{2} = dr + \frac{r_s dr}{r-r_s} = \frac{r dr}{r-r_s} = C dr$.
 - Puisque $AC = 1$ on peut donc écrire :

$$A c^2 dt^2 - C dr^2 = A \cdot [c^2 dt^2 - C^2 dr^2] = \frac{A}{4} \cdot [(dU + dV)^2 - (dU - dV)^2] = A(r(U, V)) dU dV .$$
 - Pour préciser $A(r(U, V))$ et faire de même avec la partie angulaire $r^2 d\Omega^2$, il faut exprimer $r(U, V)$.
 - On obtient : $r = r_s \cdot \left[1 + W_0\left(\exp\left(\frac{V-U}{2r_s} - 1\right)\right)\right]$, où W_0 représente la fonction principale de Lambert, mais cela est peu pratique à utiliser.
- 3.a.
 - Les courbes telles que $c t = \frac{U+V}{2} = Cste$ sont des droites parallèles à la diagonale "décroissante".
 - La propriété $r = Cste$ impose de même : $\frac{V-U}{2} = Cste$; les courbes correspondantes sont des droites parallèles à la diagonale "croissante".



- 3.b.
- Il n'y a pas de limitation sur $U + V$; la diagonale "décroissante" est associée à $c t = 0$.
 - Il n'y a pas de limitation sur $V - U$ pour $r > r_s$; la diagonale "croissante" est associée à la valeur intermédiaire $r = r_s \cdot \left[1 + W_0\left(\frac{1}{e}\right)\right] \approx 1,28 r_s$.
 - Pour $r < r_s$ les droites (exemple en pointillés sur le graphique précédent) sont limitées au dessus de la diagonale "croissante", associée à $r = 0$.

III. Coordonnées de Kruskal-Szekeres et de Lemaître

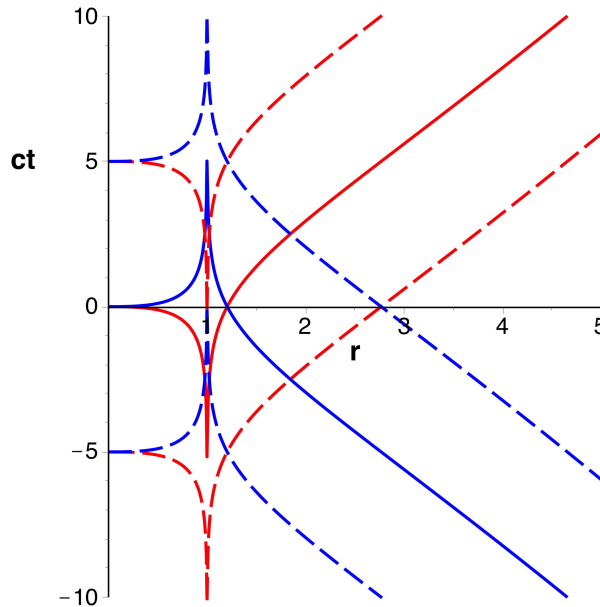
- 1.a.
- En se limitant au demi-plan $(r, c t)$, les équations du mouvement peuvent se déduire du lagrangien quadratique $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(A c^2 \dot{t}^2 - \frac{1}{A} \dot{r}^2 \right)$ (paramétré par s).
 - On obtient ainsi : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = 0$, donc $\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{c}} \right) = A c \dot{t} = 0$. Ceci correspond à $A c \frac{dt}{ds} = Cste$, mais à l'infini $A = 1$ et la vitesse est nulle, donc $ds^2 = A c^2 dt^2$. Ainsi $ds = A c dt$ sur toute la trajectoire.
 - L'équation pour r s'en déduit simplement à l'aide de ds^2 : $1 = A c^2 \dot{t}^2 - \frac{1}{A} \dot{r}^2$. Compte tenu de ce qui précède, en notant $r_s = 1$ (pris comme unité) pour simplifier : $\dot{r}^2 = 1 - A = \frac{1}{r}$; $\dot{r} = \frac{dr}{ds} = \pm \frac{1}{\sqrt{r}}$.
 - On peut aussi considérer $\frac{dr}{c dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{t}} = \pm \frac{A}{\sqrt{r}}$; $v = \frac{\sqrt{c} dr}{\sqrt{A} c dt} = \pm \frac{1}{\sqrt{r}}$.
 - Ces trajectoires sont donc caractérisées par : $c dt = \pm \frac{r^2 dr}{(r-1)\sqrt{r}}$. Pour les tracer, on peut intégrer :

$$c dt = \pm \frac{(r+1) dr}{\sqrt{r}} \pm \frac{dr}{(r-1)\sqrt{r}} ;$$

$$c t = \pm \frac{2}{3} \sqrt{r} (r+3) \pm \ln \left(\left| \frac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{r}-1} \right| \right) + Cste .$$

♦ remarque : en toute rigueur $c t$ a une composante imaginaire pour $r < r_s$; on l'omet ici.

- On peut définir ainsi deux familles de trajectoires, associées à deux paramètres analogues à ceux d'Eddington-Finkelstein : $c t = \frac{2}{3} \sqrt{r} (r+3) + \ln \left(\left| \frac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{r}-1} \right| \right) + U$; $c t = -\frac{2}{3} \sqrt{r} (r+3) - \ln \left(\left| \frac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{r}-1} \right| \right) + V$.
- La représentation (rouge pour U et bleu pour V) montre qu'on obtient effectivement deux familles de courbes permettant un repérage dans le demi-plan $(r, c t)$.



- 1.b.
- Pour exprimer la métrique en fonction de U et V , on peut considérer :

$$c dt = \sqrt{r} \frac{dr}{A} + dU ; c dt = -\sqrt{r} \frac{dr}{A} + dV ;$$

$$c^2 dt^2 = \frac{(dU+dV)^2}{4} ; \frac{dr^2}{A^2} = \frac{(dU-dV)^2}{4r} .$$

- On obtient ainsi :

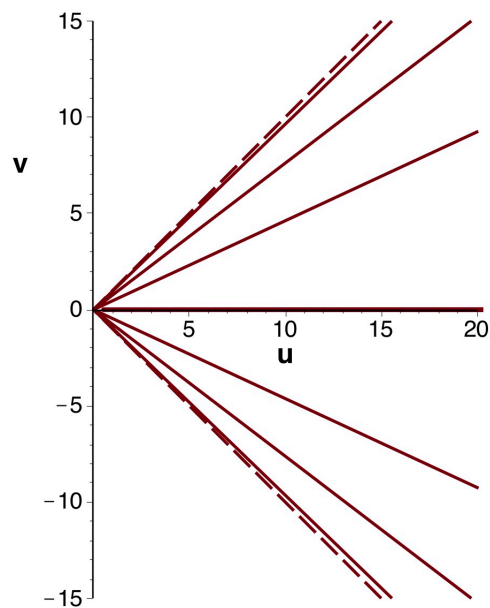
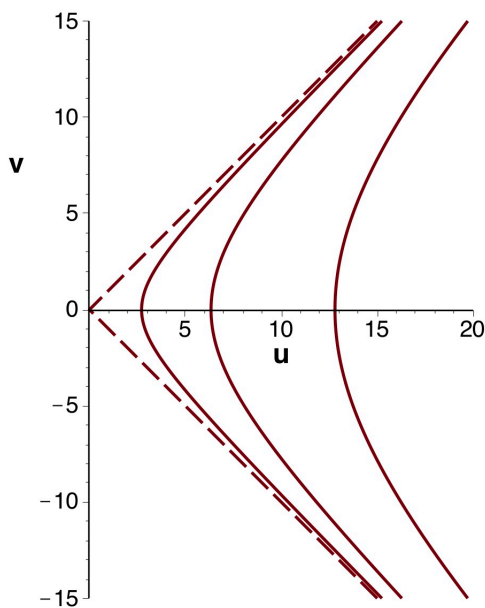
$$ds^2 = A \cdot \left[c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{A^2} \right] = \frac{A}{4} \left[(dU + dV)^2 - \frac{1}{r} (dU - dV)^2 \right] = \frac{A^2}{4} \left[dU^2 + dV^2 + 2 \frac{r+1}{r-1} dU dV \right] .$$

• On constate que la métrique ne se simplifie pas du tout comme avec les variables de Finkelstein ; il n'est pas possible de poursuivre la méthode utilisée pour obtenir le diagramme de type Kruskal-Szekeres.

- 2.a. • La famille de courbes décrivant la chute correspond au paramètre V : $dR = c dt + \sqrt{r} \frac{dr}{A}$.
- Le long de la trajectoire, le temps propre correspond à : $c^2 dT^2 = A \cdot \left[c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{A^2} \right]$ mais par ailleurs : $dR = 0 = c dt + \sqrt{r} \frac{dr}{A}$. En substituant on obtient : $c^2 dT^2 = A^2 c^2 dt^2$, donc $dT = A dt$.
- 2.b. • Pour un déplacement quelconque, il faut tenir compte du fait que le repérage (R, cT) n'est pas statique : les horloges sur les différentes courbes ne sont pas synchronisées.
- Ceci peut se vérifier en reportant dans la métrique les deux expressions précédentes ; le décalage de synchronisation est caractérisé par la présence du terme non diagonal :
- $$c dt = \frac{c dT}{A} ; \quad \sqrt{r} \frac{dr}{A} = dR - \frac{c dT}{A} ; \quad ds^2 = c^2 dT^2 - \frac{A}{r} dR^2 + \frac{2}{r} c dT dR .$$
- Pour un changement de courbe infinitésimal, le décalage est logiquement proportionnel à dR (nul sur une même trajectoire) : $c dT = A c dt + \lambda dR = (A + \lambda) c dt + \lambda \sqrt{r} \frac{dr}{A}$ avec $\lambda = \lambda(r, t)$.
- En inversant le système des deux expressions :
- $$c dt = \frac{1}{A} (c dT - \lambda dR) ; \quad \sqrt{r} dr = (A + \lambda) dR - c dT ;$$
- $$ds^2 = c^2 dT^2 - \frac{1}{Ar} [(A + \lambda)^2 - \lambda^2 r] dR^2 + 2 \left(\frac{1}{r} - \lambda \right) c dT dR .$$
- La synchronisation des horloges correspond à éliminer le terme non diagonal :
- $$\lambda = \frac{1}{r} ; \quad c dT = c dt + \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{dr}{A} .$$
- 2.c. • En reportant dans la métrique : $ds^2 = c^2 dT^2 - \frac{1}{r} dR^2$. Il s'agit en fait du repérage de Lemaître.

IV. Métrique de Kruskal-Szekeres

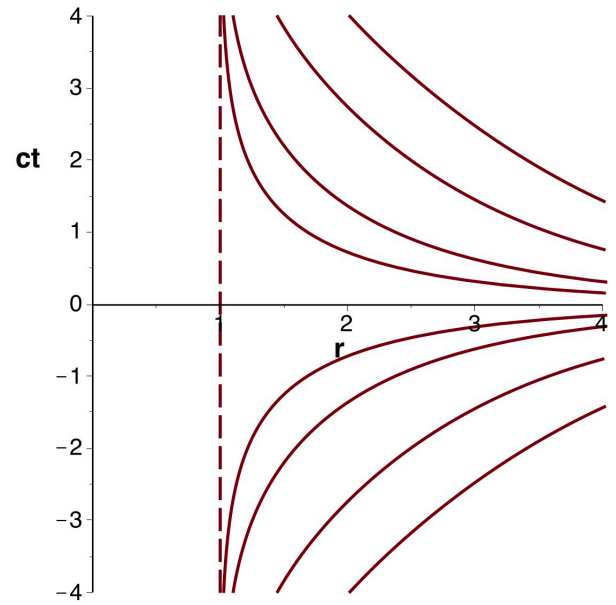
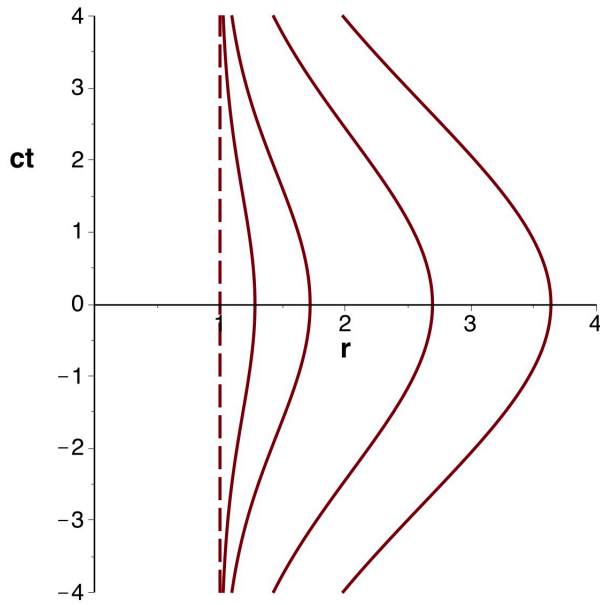
- 1.a. • En prenant r_s comme unité, on peut écrire : $u^2 - v^2 = (r - 1) e^r$; les courbes correspondant à $r = Cste$ sont des branches d'hyperboles (ci-dessous pour $r = 1 ; 2 ; 3 ; 4$).
- ◊ remarque : la singularité en $r = r_s$ ne se limite pas à $u = 0$ et $v = 0$ mais est "développée" dans les asymptotes $u = |v|$; la zone (I) de Kruskal-Szekeres correspond à la région à droite des asymptotes.



• On peut aussi écrire : $v = u \tanh\left(\frac{ct}{2}\right)$; les courbes correspondant à $ct = Cste$ sont des demi-droites (ci-dessus pour $ct = 0 ; \pm 1 ; \pm 2 ; \pm 4 ; \pm 200 ; \pm \infty$).
 ◇ remarque : les asymptotes correspondent aussi à $ct = \pm \infty$; leurs différents points précisent la façon selon laquelle cette limite est atteinte.

- 1.b. • La relation $u^2 - v^2 = (r - 1) e^r$ donne inversement : $r = 1 + W_0\left(\frac{u^2 - v^2}{e}\right)$.
 ◇ remarque : W_0 représente la fonction principale de Lambert.
 • La relation $v = u \tanh\left(\frac{ct}{2}\right)$ donne inversement : $ct = 2 \operatorname{artanh}\left(\frac{v}{u}\right)$.
 ◇ remarque : plus complètement $r = r_s \cdot \left[1 + W_0\left(\frac{u^2 - v^2}{e}\right)\right]$ et $ct = 2 r_s \operatorname{artanh}\left(\frac{v}{u}\right)$.

- 1.c. • On peut écrire : $r = 1 + W_0\left(\frac{u^2}{e \cdot \cosh^2\left(\frac{ct}{2}\right)}\right)$; les courbes correspondant à $u = Cste$ ont l'allure représentée ci-dessous à gauche (pour $u = 0 ; 1 ; 2 ; 5 ; 10$).



• On peut aussi écrire : $r = 1 + W_0\left(\frac{v^2}{e \cdot \sinh^2\left(\frac{ct}{2}\right)}\right)$; les courbes correspondant à $v = Cste$ ont l'allure représentée ci-dessus à droite (pour $v = 0 ; \pm 1 ; \pm 2 ; \pm 5 ; \pm 10$).

2. • Pour changer de notations, il est plus simple de partir des définitions (ici non simplifiées) :

$$dv = \frac{1}{2r_s} e^{r/2r_s} \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} \left[\cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) c dt + \frac{r}{r-r_s} \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) dr \right] ;$$

$$du = \frac{1}{2r_s} e^{r/2r_s} \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} \left[\sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) c dt + \frac{r}{r-r_s} \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) dr \right] .$$

• Inversement :

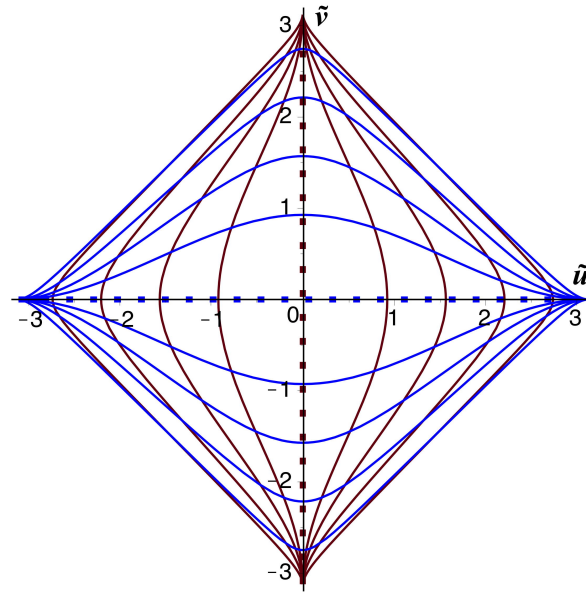
$$\frac{r-r_s}{r} c^2 dt^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} \left[\cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) dv - \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) du \right]^2 ;$$

$$\frac{r}{r-r_s} dr^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} \left[\sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) dv - \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) du \right]^2 .$$

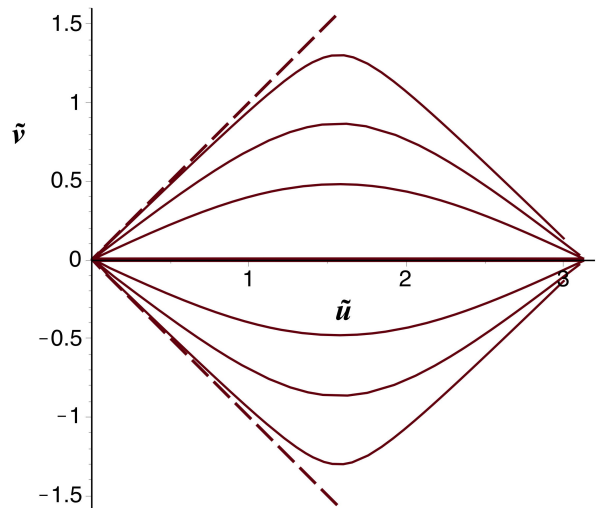
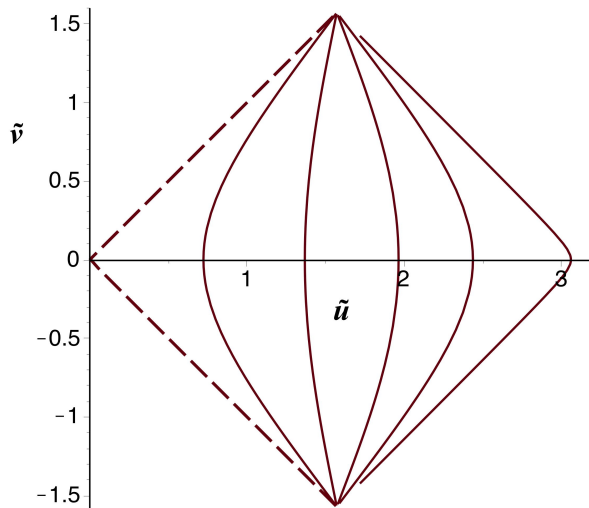
• Au total, la métrique peut donc s'écrire : $ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} [dv^2 - du^2] - r^2 d\Omega^2$ où il resterait à substituer dans le terme angulaire l'expression $r(u, v)$ obtenue à la question (1.b).

V. Représentation de Penrose-Carter

- 1.a. • En utilisant $\tilde{u} = \arctan(u + v) + \arctan(u - v)$ et $\tilde{v} = \arctan(u + v) - \arctan(u - v)$ pour u fixé, on obtient une représentation paramétrique (selon v) des courbes $u = Cste$ (ici en bleu) ; de même inversement pour v fixé (ici en rouge).



- 1.b. • Les deux familles de courbes $\{u = Cste\}$ et $\{v = Cste\}$ sont orthogonales ; on peut difficilement comprendre quelle notion d'angle utiliser pour conclure que leurs images sont orthogonales, donc cette anamorphose n'est pas une transformation conforme (seuls les angles de $\pm 45^\circ$ sont invariants).
2. • En prenant r_s comme unité, on peut écrire : $u^2 - v^2 = (r - 1) e^r$; les courbes correspondant à $r = Cste$ sont des branches d'hyperboles auxquelles il suffit d'appliquer l'anamorphose précédente.

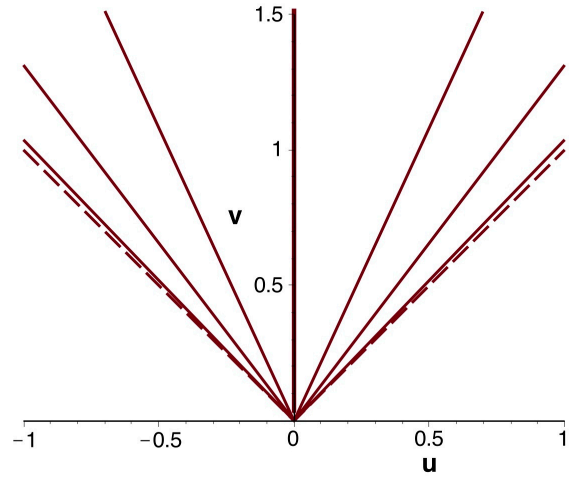
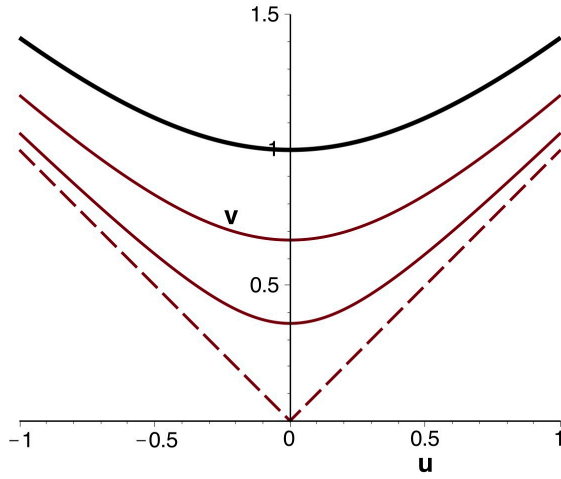


- On peut aussi écrire : $v = u \tanh\left(\frac{ct}{2}\right)$; les courbes avec $ct = Cste$ sont des demi-droites auxquelles on applique l'anamorphose. Ici encore, la transformation de (r, ct) n'est pas conforme).

♦ remarque : on visualise l'espace-temps jusqu'à l'infini mais le voisinage de l'origine est peu modifié.

VI. Métrique de Kruskal-Szekeres

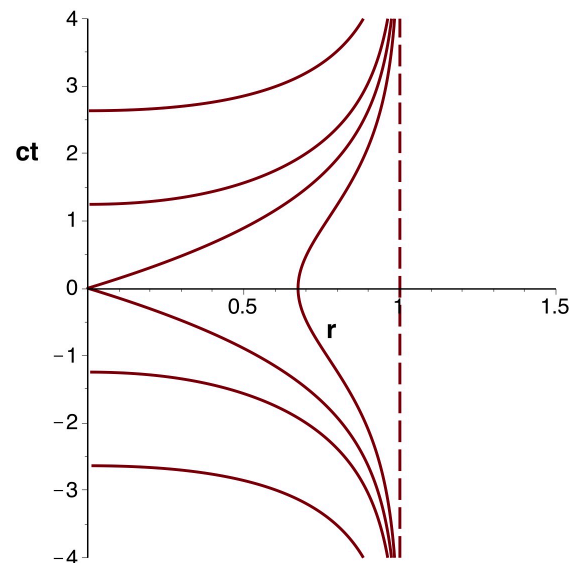
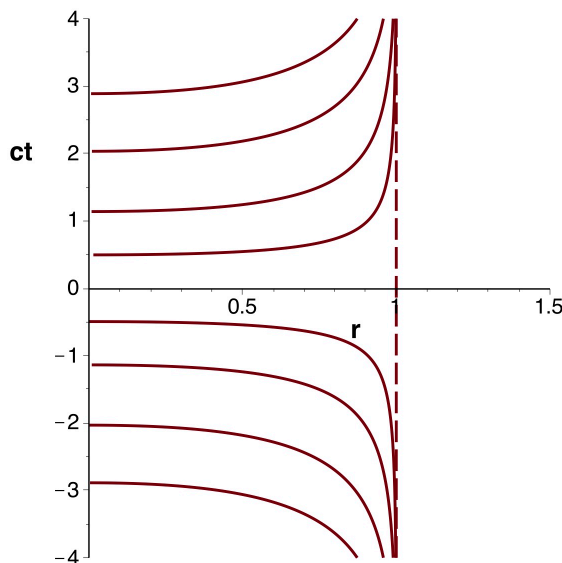
- 1.a. • En prenant r_s comme unité, on peut écrire : $u^2 - v^2 = (r - 1) e^r$; les courbes correspondant à $r = Cste$ sont des branches d'hyperboles (ci-dessous pour $r = 1 ; 0,95 ; 0,8 ; 0$).
 ♦ remarque : la branche d'hyperbole pour $r = 0$ correspond à la singularité "centrale".



- On peut aussi écrire : $u = v \tanh\left(\frac{ct}{2}\right)$; les courbes correspondant à $ct = Cste$ sont des demi-droites (ci-dessus pour $ct = 0 ; \pm 1 ; \pm 2 ; \pm 4 ; \pm 200 ; \pm \infty$).
 ♦ remarque : on omet la composante imaginaire de ct ("compensée" par les expressions utilisées).
 ♦ remarque : ces demi-droites sont en fait limitées par la branche d'hyperbole correspondant à $r = 0$.
 ♦ remarque : les asymptotes correspondent aussi à $ct = \pm \infty$; leurs différents points précisent la façon selon laquelle cette limite est atteinte.

- 1.b. • La relation $u^2 - v^2 = (r - 1) e^r$ donne inversement : $r = 1 + W_0\left(\frac{u^2 - v^2}{e}\right)$.
 ♦ remarque : W_0 représente la fonction principale de Lambert.
 • La relation $u = v \tanh\left(\frac{ct}{2}\right)$ donne inversement : $ct = 2 \operatorname{artanh}\left(\frac{u}{v}\right)$.
 ♦ remarque : plus complètement $r = r_s \cdot \left[1 + W_0\left(\frac{u^2 - v^2}{e}\right)\right]$ et $ct = 2 r_s \operatorname{artanh}\left(\frac{u}{v}\right)$.

- 1.c. • On peut écrire : $r = 1 + W_0\left(\frac{-u^2}{e \cdot \sinh^2\left(\frac{ct}{2}\right)}\right)$; les courbes correspondant à $u = Cste$ ont l'allure représentée ci-après à gauche (pour $u = 0 ; 0,25 ; 0,6 ; 1,2 ; 2$).



• On peut aussi écrire : $r = 1 + W_0 \left(\frac{-v^2}{e \cdot \cosh^2(\frac{ct}{2})} \right)$; les courbes correspondant à $v = Cste$ ont l'allure représentée ci-avant à droite (pour $v = 0 ; \pm 0,8 ; \pm 1 ; \pm 1,2 ; \pm 2$).

2. • Pour changer de notations, il est plus simple de partir des définitions (ici non simplifiées) :

$$dv = \frac{1}{2r_s} e^{r/2r_s} \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} \left[\sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) c dt + \frac{r}{r-r_s} \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) dr \right] ;$$

$$du = \frac{1}{2r_s} e^{r/2r_s} \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} \left[\cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) c dt + \frac{r}{r-r_s} \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) dr \right] .$$

• Inversement :

$$\frac{r-r_s}{r} c^2 dt^2 = -\frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} \left[\sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) dv - \cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) du \right]^2 ;$$

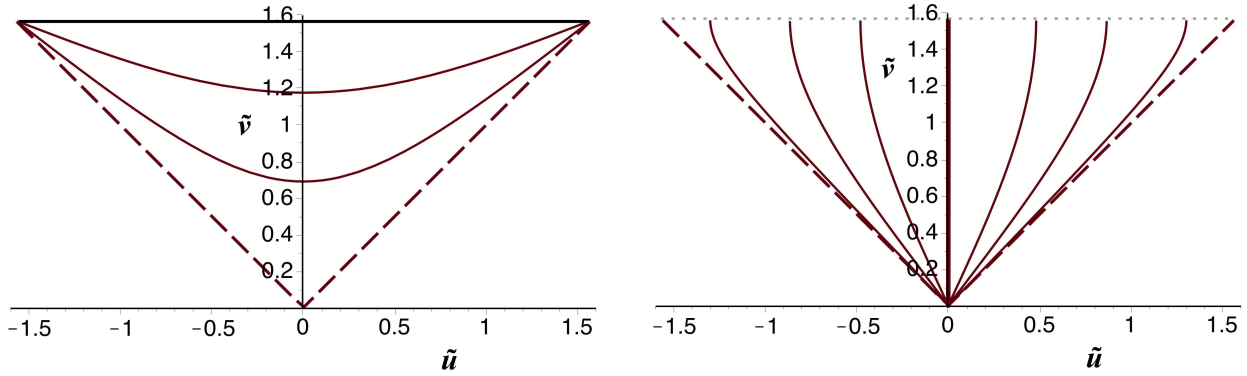
$$\frac{r}{r-r_s} dr^2 = -\frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} \left[\cosh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) dv - \sinh\left(\frac{ct}{2r_s}\right) du \right]^2 .$$

• Au total, la métrique peut donc s'écrire : $ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} [dv^2 - du^2] - r^2 d\Omega^2$ où il resterait à substituer dans le terme angulaire l'expression $r(u, v)$ obtenue à la question (1.b).

♦ remarque : on retrouve la même expression que pour la région (I) avec $r > r_s$.

VII. Représentation de Penrose-Carter

1. • En prenant r_s comme unité, on peut écrire : $u^2 - v^2 = (r - 1) e^r$; les courbes correspondant à $r = Cste$ sont des branches d'hyperboles auxquelles il suffit d'appliquer l'anamorphose.



• On peut aussi écrire : $u = v \tanh\left(\frac{ct}{2}\right)$; les courbes correspondant à $ct = Cste$ sont des demi-droites auxquelles on applique l'anamorphose.

2. • On obtient : $u \pm v = \tan\left(\frac{\tilde{u} \pm \tilde{v}}{2}\right)$ et $du \pm dv = \frac{d\tilde{u} \pm d\tilde{v}}{2 \cos^2\left(\frac{\tilde{u} \pm \tilde{v}}{2}\right)}$; la métrique (simplifiée) peut s'écrire :

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} (dv^2 - du^2) = \frac{r_s^3 e^{-r/r_s}}{r \cos^2\left(\frac{\tilde{u} + \tilde{v}}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\tilde{u} - \tilde{v}}{2}\right)} (d\tilde{v}^2 - d\tilde{u}^2) .$$

♦ remarque : cette expression est peu utile car il est beaucoup moins pratique d'effectuer les calculs directement avec ce repérage (il suffit de se limiter à utiliser l'anamorphose).

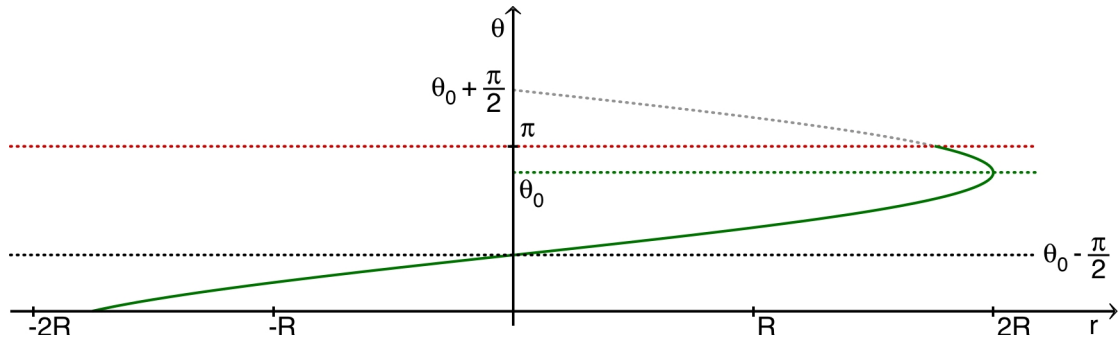
VIII. Complétude d'une carte

- Le domaine de la carte proposée est la "bande" correspondant à $u \in \mathbb{R}$ et $v \in [-a ; a]$.
- Étant donné l'espace \mathcal{E} étudié, il est inutile de chercher à compléter cette représentation en étendant le domaine limité de la variable v .

IX. Complétude d'une carte

- On peut considérer un cercle de centre (R, θ_0) et de rayon R .
 - La tangente à l'origine a une équation de la forme $\theta = \theta_0 \pm \frac{\pi}{2} \bmod \pi$ (constante).
 - En projetant le diamètre sur la direction θ , on obtient l'équation polaire : $r = 2R \cos(\theta - \theta_0)$, avec $\theta \in \left[\theta_0 - \frac{\pi}{2}; \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right] \bmod \pi$. La représentation est donc une portion de sinusoïde.
 - On constate que, par rapport à la représentation "usuelle" ($r > 0$ et $\theta \in [0; 2\pi[$), la discontinuité en $r = 0$ a disparu. Par contre, la limite pour $\theta = 0 \bmod \pi$ présente une discontinuité associée à un changement de signe de r .

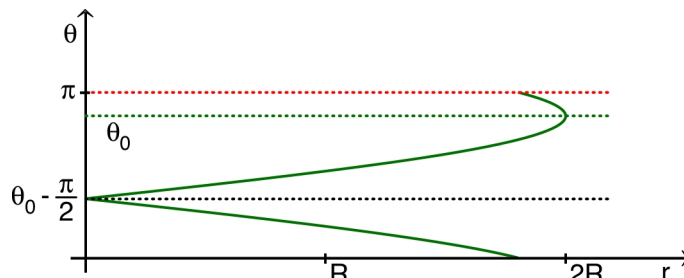
♦ remarque : on peut considérer que la "discontinuité" (logiquement) associée à la périodicité de θ n'en est pas vraiment une.



- En outre, la tangente limite (en $r = 0$) à la courbe représentative (sinusoïde) n'est pas la droite (horizontale) représentant la tangente au cercle. Ceci est lié au fait que θ est indéterminé pour $r = 0$. À l'approche de cette limite, le comportement n'est plus qu'indirectement représentatif : tous les points limites représentent l'origine, chacun de ces points indique la façon (direction) selon laquelle l'origine est atteinte ; deux courbes dont les représentants ont la même limite sont donc tangentes à l'origine.
- Si on propose d'étendre cette représentation à $\theta \in [0; 2\pi[$, cela ne complète pas une représentation incomplète mais donne ainsi une représentation double (la seconde étant symétrique horizontalement). En pratique, il est alors préférable de limiter à $r \geq 0$ (distance à l'origine).

X. Complétude d'une carte

- Un tel espace est localement plat (on peut obtenir un cône en "enroulant" une portion de plan). On peut y considérer un cercle de centre (R, θ_0) et de rayon R .
 - La tangente à l'origine (demi-droite) a une équation de la forme $\theta = \theta_0 \pm \frac{\pi}{2} \bmod \pi$ (constante).
 - En projetant le diamètre sur la direction θ , on obtient l'équation polaire : $r = 2R \cos(\theta - \theta_0)$, avec $\theta \in \left[\theta_0 - \frac{\pi}{2}; \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right] \bmod \pi$. La représentation est donc une portion de sinusoïde.



- On constate que la limite pour $\theta = 0 \bmod \pi$ présente une discontinuité, logiquement associée à la périodicité de θ .
- Dans ce cas particulier pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, la limite pour $r = 0$ ne présente pas de discontinuité (il y a par contre un point de rebroussement). Par ailleurs, la tangente se limite à une demi-droite.

• D'un autre point de vue, la tangente limite (en $r = 0$) à la courbe représentative (sinusoïde) n'est pas la droite (horizontale) représentant la tangente au cercle. Ceci est lié au fait que θ est indéterminé pour $r = 0$. À l'approche de cette limite, le comportement n'est plus qu'indirectement représentatif : tous les points limites représentent l'origine, chacun de ces points indique la façon (direction) selon laquelle l'origine est atteinte ; deux courbes dont les représentants ont la même limite sont donc tangentes à l'origine.

2. • Si on propose d'étendre cette représentation à $r \in \mathbb{R}$, cela est possible (il existe des cônes généralisés symétriques de part et d'autres du sommet), mais non nécessaire (ce n'est pas d'un tel espace qu'on a souhaité faire la description).

♦ remarque : on peut montrer que, dans le cas limite d'un astre ultra-relativiste, la métrique intérieure au voisinage du centre correspond à un espace conique d'angle $\alpha = \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 49^\circ$; dans ce cas, il n'y a clairement rien à compléter pour $r < 0$.

• Si on propose d'étendre cette représentation à $\theta \in [0; 2\pi[$, cela ne complète pas une représentation incomplète mais donne une représentation double (la seconde étant identique, décalée de π).

XI. Coordonnées de Kruskal-Szekeres et transformation de Lorentz

- 1.a. • Pour $r > r_s$, les coordonnées de Kruskal-Szekeres s'écrivent (avec r_s comme unité) :

$$u = \sqrt{r-1} e^{r/2} \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) ; v = \sqrt{r-1} e^{r/2} \sinh\left(\frac{ct}{2}\right).$$

• Soit une vitesse d'entraînement : $\beta_e = -\tanh\left(\frac{ct}{2}\right) = -\frac{v}{u}$. La transformation de Lorentz (locale) correspond à : $d\underline{u} = \frac{d\ell - \beta_e c dt_{\ell oc}}{\sqrt{1-\beta_e^2}}$; $d\underline{v} = \frac{c dt_{\ell oc} - \beta_e d\ell}{\sqrt{1-\beta_e^2}}$; $c dt_{\ell oc} = \sqrt{A} c dt$; $d\ell = \sqrt{C} dr$ (algébrique).

♦ remarque : on considère des variations infinitésimales dans l'espace tangent, donc sans varier β_e .

• Ceci donne des expressions semblables à du et dv , mais différentes :

$$d\underline{u} = \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) \frac{dr}{\sqrt{A}} + \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) \sqrt{A} c dt ; d\underline{v} = \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) \sqrt{A} c dt + \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) \frac{dr}{\sqrt{A}} ;$$

$$du = \frac{\sqrt{r}}{2} e^{r/2} d\underline{u} ; dv = \frac{\sqrt{r}}{2} e^{r/2} d\underline{v}.$$

• La métrique limitée au déplacement radial serait ainsi encore plus simple que celle de Kruskal-Szekeres : $ds^2 = r_s^2 (d\underline{v}^2 - d\underline{u}^2) - r^2 d\Omega^2$.

• Le problème est ensuite de déterminer $r(u, v)$ pour exprimer la partie angulaire de la métrique, mais aussi pour savoir interpréter à quoi correspond $r = r_s$. Puisqu'on part de fonctions de r , il faut déterminer $\underline{u}(r, ct)$ et $\underline{v}(r, ct)$ (ou des combinaisons) puis inverser. Or on constate que $d\underline{u}$ et $d\underline{v}$ ne sont pas des différentielles totales, puisque les dérivées croisées diffèrent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{A}} ; \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial A}{\partial r} ; \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \neq 1 ;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{A}} ; \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial A}{\partial r}.$$

- 1.b. • Pour $r < r_s$ les coordonnées de Kruskal-Szekeres s'écrivent (avec r_s comme unité pour simplifier) :

$$u = \sqrt{1-r} e^{r/2} \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) ; v = \sqrt{1-r} e^{r/2} \cosh\left(\frac{ct}{2}\right).$$

♦ remarque : étant donné que les expressions diffèrent de celles pour $r > r_s$ (ici on ignore la composante imaginaire de ct), il faut vérifier ce second cas qui n'est pas une simple extrapolation.

• On suppose une vitesse d'entraînement : $\beta_e = -\coth\left(\frac{ct}{2}\right) = -\frac{v}{u}$. Dans la transformation de Lorentz (locale), les notations $c dt_{\ell oc} = \sqrt{A} c dt$; $d\ell = \sqrt{C} dr$ (algébrique) deviennent imaginaires, mais en les conservant formellement on peut obtenir des expressions où les signes négatifs "gênants" se simplifient :

$$d\underline{u} = \sqrt{\frac{A}{1-\beta_e^2}} \left[\frac{dr}{A} + \coth\left(\frac{ct}{2}\right) c dt \right] ; d\underline{v} = \sqrt{\frac{A}{1-\beta_e^2}} \left[c dt + \coth\left(\frac{ct}{2}\right) \frac{dr}{A} \right] ;$$

$$d\underline{u} = \sqrt{\frac{1-r}{r}} \left[\sinh\left(\frac{ct}{2}\right) \frac{dr}{A} + \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) c dt \right] ; d\underline{v} = \sqrt{\frac{1-r}{r}} \left[\sinh\left(\frac{ct}{2}\right) c dt + \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) \frac{dr}{A} \right] ;$$

$$d\underline{u} = -\sqrt{\frac{r}{1-r}} \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) dr + \sqrt{\frac{1-r}{r}} \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) c dt ;$$

$$d\underline{v} = \sqrt{\frac{1-r}{r}} \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) c dt - \sqrt{\frac{r}{1-r}} \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) dr.$$

• On obtient ici encore : $du = \frac{\sqrt{r}}{2} e^{r/2} d\underline{u}$; $dv = \frac{\sqrt{r}}{2} e^{r/2} d\underline{v}$.

♦ remarque : pour $r < r_s$; A et $C < 0$; $|v_e| > c$ mais $\sqrt{\frac{A}{1-\beta_e^2}}$ reste réel.

♦ remarque : on aboutit à la même conclusion en utilisant la composante imaginaire de $c t$.

2.a. • Pour obtenir une primitive il faut multiplier $d\underline{u}$ par un facteur intégrant $F(r, c t)$ adapté ; on suppose ici que $F(r)$ peut convenir. En reportant, pour $r > r_s$, l'égalité des dérivées croisées impose :

$$\frac{1}{2} \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) \frac{F}{\sqrt{A}} = \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) \left[F' \sqrt{A} + \frac{1}{2} \frac{F}{\sqrt{A}} \frac{1}{r^2} \right] ;$$

$$\frac{F'}{F} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r} \right) ; \quad F = Cste \cdot \sqrt{r} e^{r/2} \quad (\text{constante } \frac{1}{2} \text{ pour les notations de Kruskal-Szekeres}).$$

• Il faut de même multiplier $d\underline{v}$ par un facteur intégrant $G(r, c t)$ adapté ; on suppose ici que $G(r)$ peut convenir. En reportant, l'égalité des dérivées croisées impose :

$$\frac{1}{2} \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) \frac{G}{\sqrt{A}} = \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) \left[G' \sqrt{A} + \frac{1}{2} \frac{G}{\sqrt{A}} \frac{1}{r^2} \right] ;$$

$$\frac{G'}{G} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r} \right) ; \quad G = Cste \cdot \sqrt{r} e^{r/2} \quad (\text{constante } \frac{1}{2} \text{ pour les notations de Kruskal-Szekeres}).$$

2.b. • Pour $r < r_s$ l'intégration est analogue avec les mêmes facteurs intégrants.

♦ remarque : par contre, la justification du signe n'est pas évidente : $\sqrt{\frac{A}{1-\beta_e^2}} = \sqrt{\frac{1-r}{r}} \left| \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) \right|$, donc il subsiste quelques ambiguïtés de signe dans la définition de u et v , qui sont incorporées dans la constante d'intégration du facteur intégrant.

3.a. • Pour $r > r_s$ on peut multiplier $d\underline{u}$ par $F(r, c t) = \frac{1}{\cosh\left(\frac{ct}{2}\right) \sqrt{A}}$ et $d\underline{v}$ par $G(r, c t) = \frac{1}{\sinh\left(\frac{ct}{2}\right) \sqrt{A}}$; on obtient ainsi une séparation des variables : $d\tilde{u} = \frac{dr}{A} + \tanh\left(\frac{ct}{2}\right) c dt$; $d\tilde{v} = \frac{dr}{A} + \coth\left(\frac{ct}{2}\right) c dt$.

• On obtient en intégrant :

$$\tilde{u} = r + \ln(|r-1|) + 2 \ln\left(\cosh\left(\frac{ct}{2}\right)\right) ; \quad \tilde{v} = r + \ln(|r-1|) + 2 \ln\left(\sinh\left(\frac{ct}{2}\right)\right) .$$

♦ remarque : ceci correspond à $\tilde{u} = \ln(u^2)$; $\tilde{v} = \ln(v^2)$; donnant une somme au lieu d'un produit.

• En posant : $f = \tanh\left(\frac{ct}{2}\right)$ et $\kappa = \coth\left(\frac{ct}{2}\right)$, on en déduit inversement :

$$c dt = \frac{d\tilde{u}-d\tilde{v}}{f-\kappa} ; \quad \frac{dr}{A} = \frac{\kappa d\tilde{u}-f d\tilde{v}}{\kappa-f} ; \quad ds^2 = A \cdot \left[\sinh^2\left(\frac{ct}{2}\right) d\tilde{v}^2 - \cosh^2\left(\frac{ct}{2}\right) d\tilde{u}^2 \right] .$$

• La singularité de A semble ne pas être éliminée, mais $r \rightarrow r_s$ impose $t \rightarrow \infty$ et la divergence de $\sinh \approx \cosh$ compense certains effets.

• Les calculs avec ces notations sont peu pratiques car les expressions de $r(\tilde{u}, \tilde{v})$ et $c t(\tilde{u}, \tilde{v})$ sont loin d'être simples, mais il ne sont pas systématiquement impossibles. En particulier $\tilde{u} - \tilde{v}$ est fonction de t seulement, donc les courbes $t = Cste$ sont des droites en diagonale comme pour r avec les coordonnées de Lemaître ; ceci permet une étude analogue en fonction de t .

3.b. • Pour $r < r_s$ on peut multiplier $d\underline{u}$ par $F(r, c t) = \frac{1}{\sinh\left(\frac{ct}{2}\right) \sqrt{|A|}}$ et $d\underline{v}$ par $G(r, c t) = \frac{1}{\cosh\left(\frac{ct}{2}\right) \sqrt{|A|}}$; on obtient ainsi une séparation des variables : $d\tilde{u} = \frac{dr}{A} + \coth\left(\frac{ct}{2}\right) c dt$; $d\tilde{v} = \frac{dr}{A} + \tanh\left(\frac{ct}{2}\right) c dt$.

• On obtient en intégrant :

$$\tilde{u} = r + \ln(|r-1|) + 2 \ln\left(\cosh\left(\frac{ct}{2}\right)\right) ; \quad \tilde{v} = r + \ln(|r-1|) + 2 \ln\left(\sinh\left(\frac{ct}{2}\right)\right) .$$

• On en déduit inversement :

$$ds^2 = A \cdot \left[\sinh^2\left(\frac{ct}{2}\right) d\tilde{u}^2 - \cosh^2\left(\frac{ct}{2}\right) d\tilde{v}^2 \right] = |A| \cdot \left[\cosh^2\left(\frac{ct}{2}\right) d\tilde{v}^2 - \sinh^2\left(\frac{ct}{2}\right) d\tilde{u}^2 \right] .$$

XII. Repérage de Kruskal-Szekeres et transformation de Lorentz

• Pour $\beta_e = -\tanh\left(\frac{ct}{2}\right) = -\frac{v}{u}$ (avec r_s comme unité), la transformation de Lorentz (locale) correspond à : $d\underline{u} = \frac{d\ell - \beta_e c dt_{loc}}{\sqrt{1-\beta_e^2}}$; $d\underline{v} = \frac{c dt_{loc} - \beta_e d\ell}{\sqrt{1-\beta_e^2}}$; $c dt_{loc} = \sqrt{A} c dt$; $d\ell = \sqrt{C} dr$ (algébrique).

- Pour $r > r_s$ (A et $C > 0$), on considère $v_e = \frac{d\ell}{dt_{\ell oc}} = \frac{dr}{A dt}$.
- Ceci donne : $d\underline{u} = \sqrt{A} \left[\sinh\left(\frac{ct}{2}\right) c dt + \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) \frac{dr}{A} \right]$; $d\underline{v} = \sqrt{A} \left[\cosh\left(\frac{ct}{2}\right) c dt + \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) \frac{dr}{A} \right]$.
- On multiplie ensuite par un facteur intégrant pour obtenir des différentielles totales :

$$du = \frac{\sqrt{r}}{2} e^{r/2} d\underline{u} ; dv = \frac{\sqrt{r}}{2} e^{r/2} d\underline{v} .$$

- Pour $r < r_s$ (A et $C < 0$), la variable r devient du genre temps et la variable t devient du genre espace. Comment peut-on continuer à considérer que la vitesse d'entraînement est $v_e = \frac{d\ell}{dt_{\ell oc}}$ (avec les notations précédentes) dans ces conditions ?

- On peut alors proposer de réinterpréter : $d\ell = \sqrt{-A} c dt$ (algébrique) ; $c dt_{\ell oc} = -\sqrt{-C} dr$ (pour conserver un sens croissant de l'évolution temporelle). Ainsi : $v_e = \frac{d\ell}{dt_{\ell oc}} = A c^2 \frac{dt}{dr}$.

- La transformation de Lorentz (locale) correspond à : $d\underline{u} = \frac{d\ell - \beta_e c dt_{\ell oc}}{\sqrt{1 - \beta_e^2}}$; $d\underline{v} = \frac{c dt_{\ell oc} - \beta_e d\ell}{\sqrt{1 - \beta_e^2}}$.

- En omettant la composante imaginaire de ct : $\beta_e = -\tanh\left(\frac{ct}{2}\right) = -\frac{u}{v}$ (avec r_s comme unité).

- Ceci donne : $d\underline{u} = \sqrt{-A} \left[\cosh\left(\frac{ct}{2}\right) c dt + \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) \frac{dr}{A} \right]$; $d\underline{v} = \sqrt{-A} \left[\sinh\left(\frac{ct}{2}\right) c dt + \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) \frac{dr}{A} \right]$.

- On multiplie ensuite par le même facteur intégrant pour obtenir des différentielles totales :

$$du = \frac{\sqrt{r}}{2} e^{r/2} d\underline{u} ; dv = \frac{\sqrt{r}}{2} e^{r/2} d\underline{v} .$$

♦ remarque : on aboutit à la même conclusion en utilisant la composante imaginaire de ct .

- Il est inattendu d'aboutir à la conclusion que le mouvement n'est pas supraluminique ; d'autant plus que cette vitesse tend vers zéro pour $t \rightarrow 0$ (ce qui n'est par ailleurs pas pour $r \rightarrow 0$ comme avec le repérage de Lemaître). Il est tout autant inattendu de constater que si on applique une telle transformation de Lorentz, on obtient ainsi le même résultat qu'avec les notations "classiques".

- Les coordonnées de Kruskal-Szekeres peuvent ainsi paraître mieux "justifiées" dans ce cas, mais avec une toute autre interprétation.

XIII. Coordonnées de Kruskal-Szekeres et de Lemaître

- La vitesse d'entraînement de Lemaître (dans le cas basique) est : $\beta_e = \frac{dr}{A c dt} = -\sqrt{\frac{r_s}{r}}$.

- En prenant r_s comme unité, ceci correspond à :

$$c dt = -\frac{\sqrt{r}}{1-\frac{1}{r}} dr = -\sqrt{r} \left[1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \dots \right] dr ;$$

$$c dt = -\sqrt{r} dr - \frac{1}{\sqrt{r}} dr - \frac{1}{r\sqrt{r}} \left[1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \dots \right] dr ;$$

$$c dt = -\sqrt{r} dr - \frac{1}{\sqrt{r}} dr - \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{r-1} dr .$$

- En passant par $x = \sqrt{r}$ on obtient :

$$c dt = -2x^2 dx - 2dx - \frac{2}{x^2-1} dx = -2x^2 dx - 2dx - \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{x+1} dx .$$

- L'intégration donne : $ct = -\frac{2}{3} \sqrt{r} (r+3) - \ln\left(\left|\frac{\sqrt{r}-1}{\sqrt{r}+1}\right|\right) + Cste$.

- Le premier terme décrit le comportement à grande distance ; le second décrit le voisinage de la singularité. Pour $r > r_s$ avec $\frac{ct}{2} \approx -\frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{\sqrt{r}-1}{\sqrt{r}+1}\right|\right) = \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$ on retrouve $\beta_e = -\tanh\left(\frac{ct}{2}\right) \approx -\frac{1}{\sqrt{r}}$; c'est-à-dire que la vitesse de fait considérée par Kruskal et Szekeres n'est qu'une approximation de la vitesse de chute dans le cas particulier basique de Lemaître.

- Pour $r < r_s$ avec $\frac{ct}{2} \approx -\frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{\sqrt{r}-1}{\sqrt{r}+1}\right|\right) = \operatorname{arcoth}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$ on retrouve $\beta_e = -\coth\left(\frac{ct}{2}\right) \approx -\frac{1}{\sqrt{r}}$ (la valeur absolue dans l'expression gère aussi ce cas).

• Cela suggère par contre une propriété paradoxale : pour $r < r_s$ et au passage de $t = 0$ (t décroissant) la vitesse $\beta_e = -\coth\left(\frac{ct}{2}\right)$ diverge puis devient positive (contrairement à l'expression de Lemaître). Or, d'après le diagramme de Kruskal-Szekeres, cette partie de la région (II) peut être atteinte au moins par les photons (même si c'est moins clair pour les particules massives). Doit-on considérer que cela est dû au fait que le diagramme de Kruskal-Szekeres doit être interprété modulo π ? En fait non (il y a d'autres arguments pour cela, mais celui-ci n'est pas concluant) : l'anomalie peut simplement provenir du fait que β_e est calculée par rapport au référentiel statique, non valide dans cette zone ; il faut tester si l'effet existe par rapport au repérage de Lemaître.

XIV. Coordonnées de Kruskal-Szekeres et de Lemaître

1. • Pour $r < r_s$ et au passage de $t = 0$ (t décroissant) il peut sembler anormal que la vitesse d'entraînement $\beta_e = -\coth\left(\frac{ct}{2}\right)$ diverge, puis devienne brusquement positive (contrairement à l'expression correspondante pour le repérage de Lemaître). Toutefois, dans la mesure où on considère que la métrique de Schwarzschild est invalide dans cette région, on ne peut rien conclure sur la vitesse d'entraînement par rapport à cette dernière.

♦ remarque : on raisonne ici sans composante imaginaire pour ct .

- 2.a. • On se limite ici au cas d'une particule en chute, au passage de $u = 0$ avec $v > 0$, suivie par un référentiel en contraction ; l'étude serait analogue pour $v < 0$ avec un référentiel en expansion.

• Soit \mathcal{R} le référentiel de Kruskal-Szekeres, ayant par rapport à \mathcal{R}_0 statique une vitesse d'entraînement (vers le bas) : $\beta_e = -\tanh\left(\frac{ct}{2}\right)$ pour $r > r_s$; $\beta_e = -\coth\left(\frac{ct}{2}\right)$ pour $r < r_s$.

• Soit de même \mathcal{R}' le référentiel de Lemaître en co-mouvement avec une vitesse d'entraînement (vers le bas) $\beta'_e = -\sqrt{\frac{1}{r}}$ par rapport à \mathcal{R}_0 statique.

• Par combinaison "théorique", la transformation permettant de passer de \mathcal{R}' à \mathcal{R} correspond à une vitesse d'entraînement : $\beta''_e = \frac{\beta_e - \beta'_e}{1 - \beta_e \beta'_e}$.

• Ceci donne : $\beta''_e = -\frac{\tanh\left(\frac{ct}{2}\right) - \sqrt{\frac{1}{r}}}{1 - \tanh\left(\frac{ct}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{r}}}$ pour $r > r_s$; $\beta''_e = -\frac{1 - \tanh\left(\frac{ct}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{r}}}{\tanh\left(\frac{ct}{2}\right) - \sqrt{\frac{1}{r}}}$ pour $r < r_s$.

- 2.b. • Pour $r > r_s$ les coordonnées de Kruskal-Szekeres s'écrivent (avec r_s comme unité) :

$$u = \sqrt{r-1} e^{r/2} \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) ; v = \sqrt{r-1} e^{r/2} \sinh\left(\frac{ct}{2}\right).$$

• Ceci donne :

$$du = \frac{1}{2} \frac{r}{\sqrt{r-1}} e^{r/2} \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) dr + \frac{1}{2} \sqrt{r-1} e^{r/2} \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) c dt ;$$

$$dv = \frac{1}{2} \frac{r}{\sqrt{r-1}} e^{r/2} \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) dr + \frac{1}{2} \sqrt{r-1} e^{r/2} \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) c dt .$$

• Inversement :

$$dr = 2 \frac{\sqrt{r-1}}{r} e^{-r/2} \left[\cosh\left(\frac{ct}{2}\right) du - \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) dv \right] ;$$

$$c dt = -2 \frac{1}{\sqrt{r-1}} e^{-r/2} \left[\sinh\left(\frac{ct}{2}\right) du - \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) dv \right] .$$

• Par ailleurs les coordonnées de Lemaître correspondent à :

$$dR = \frac{r\sqrt{r}}{r-1} dr + c dt ; c dT = \frac{\sqrt{r}}{r-1} dr + c dt .$$

• Pour un point fixe par rapport au repérage de Kruskal-Szekeres, dont la variable spatiale est u , on obtient en reportant, avec $du = 0$:

$$dR = \frac{2}{\sqrt{r-1}} e^{-r/2} \left[\cosh\left(\frac{ct}{2}\right) - \sqrt{r} \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) \right] dv ;$$

$$c dT = \frac{2}{\sqrt{r-1}} e^{-r/2} \left[\cosh\left(\frac{ct}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{r}} \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) \right] dv .$$

• Avec la métrique de Lemaître (réduite) : $ds^2 = c^2 dT^2 - \frac{1}{r} dR^2$, on retrouve le résultat "théorique" :

$$c dt_{loc} = c dT ; d\ell = \frac{1}{\sqrt{r}} dR ; \beta''_e = \frac{d\ell}{c dt_{loc}} = -\frac{\tanh\left(\frac{ct}{2}\right) - \sqrt{\frac{1}{r}}}{1 - \tanh\left(\frac{ct}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{r}}} .$$

- Pour $r < r_s$ les coordonnées de Kruskal-Szekeres s'écrivent :

$$u = \sqrt{1-r} e^{r/2} \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) ; v = \sqrt{1-r} e^{r/2} \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) .$$

- Ceci donne :

$$du = -\frac{1}{2} \frac{r}{\sqrt{1-r}} e^{r/2} \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) dr + \frac{1}{2} \sqrt{1-r} e^{r/2} \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) c dt ;$$

$$dv = -\frac{1}{2} \frac{r}{\sqrt{1-r}} e^{r/2} \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) dr + \frac{1}{2} \sqrt{1-r} e^{r/2} \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) c dt .$$

- Inversement :

$$dr = 2 \frac{\sqrt{1-r}}{r} e^{-r/2} \left[\sinh\left(\frac{ct}{2}\right) du - \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) dv \right] ;$$

$$c dt = 2 \frac{1}{\sqrt{1-r}} e^{-r/2} \left[\cosh\left(\frac{ct}{2}\right) du - \sinh\left(\frac{ct}{2}\right) dv \right] .$$

- Par ailleurs les coordonnées de Lemaître correspondent à :

$$dR = \frac{r\sqrt{r}}{r-1} dr + c dt ; c dT = \frac{\sqrt{r}}{r-1} dr + c dt .$$

- Pour un point fixe par rapport au repérage de Kruskal-Szekeres, dont la variable spatiale est u , on obtient en reportant, avec $du = 0$:

$$dR = -\frac{2}{\sqrt{1-r}} e^{-r/2} \left[\sinh\left(\frac{ct}{2}\right) - \sqrt{r} \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) \right] dv ;$$

$$c dT = -\frac{2}{\sqrt{1-r}} e^{-r/2} \left[\sinh\left(\frac{ct}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{r}} \cosh\left(\frac{ct}{2}\right) \right] dv .$$

- Avec la métrique de Lemaître, on retrouve le résultat "théorique" :

$$c dt_{loc} = c dT ; d\ell = \frac{1}{\sqrt{r}} dR ; \beta_e'' = \frac{d\ell}{c dt_{loc}} = -\frac{1 - \tanh\left(\frac{ct}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{r}}}{\tanh\left(\frac{ct}{2}\right) - \sqrt{\frac{1}{r}}} .$$

- 2.c. • Pour $r < r_s$ on a obtenu : $\beta_e'' = -\frac{1 - \tanh\left(\frac{ct}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{r}}}{\tanh\left(\frac{ct}{2}\right) - \sqrt{\frac{1}{r}}} .$ Le dénominateur est strictement négatif et le numérateur ne diverge pas pour $t = 0$. L'anomalie observée dans ces conditions par rapport à \mathcal{R}_0 semble donc due au fait que le référentiel statique n'est pas valide dans cette région.

- 3.a. • Pour $r > r_s$ on a obtenu : $\beta_e'' = -\frac{\tanh\left(\frac{ct}{2}\right) - \sqrt{\frac{1}{r}}}{1 - \tanh\left(\frac{ct}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{r}}} .$ À l'approche de l'horizon $t \rightarrow \infty$ et $r \rightarrow r_s$, on obtient $\beta_e'' \approx \frac{0}{0}$ indéterminé ; cela nécessite donc une étude plus précise de la limite.

- Pour $r < r_s$ on a obtenu : $\beta_e'' = -\frac{1 - \tanh\left(\frac{ct}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{r}}}{\tanh\left(\frac{ct}{2}\right) - \sqrt{\frac{1}{r}}} .$ À l'approche de l'horizon $t \rightarrow \infty$ et $r \rightarrow r_s$, on obtient de même $\beta_e'' \approx \frac{0}{0}$ indéterminé ; cela nécessite donc une étude plus précise de la limite.

- 3.b. • Pour $r > r_s$ on considère : $\frac{ct}{2} = -\frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{\sqrt{r}-1}{\sqrt{r}+1}\right|\right) - \frac{1}{3} \sqrt{r} (r+3) = \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) - \frac{1}{3} \sqrt{r} (r+3) .$

- En posant $\lambda = \frac{1}{3} \sqrt{r} (r+3)$ on obtient :

$$\tanh\left(\frac{ct}{2}\right) = \tanh\left[\operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) - \lambda\right] = \frac{\frac{1}{\sqrt{r}} - \tanh(\lambda)}{1 - \frac{1}{\sqrt{r}} \tanh(\lambda)} ;$$

$$\beta_e'' = -\frac{\tanh\left(\frac{ct}{2}\right) - \sqrt{\frac{1}{r}}}{1 - \tanh\left(\frac{ct}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{r}}} = \tanh(\lambda) = \tanh\left(\frac{1}{3} \sqrt{r} (r+3)\right) .$$

- Pour $r \rightarrow r_s$ on obtient : $\beta_e'' \rightarrow \tanh\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0,87 < 1 .$

♦ remarque : l'expression précédente de λ correspond à la "particule de référence" du repérage de Lemaître (mouvement selon $R(T) = 0$), qui atteint $r = 0$ pour $t = 0$; pour une particule y arrivant à $t = t_0$ il faut considérer $\lambda = \frac{1}{3} \sqrt{r} (r+3) - \frac{ct_0}{2}$; la chute d'une telle particule est décalée par rapport à la contraction du repérage de Kruskal-Szekeres et la vitesse relative β_e''' de ce dernier lui paraît différente.

- Pour $r < r_s$ on considère : $\frac{ct}{2} = -\frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{\sqrt{r}-1}{\sqrt{r}+1}\right|\right) - \lambda = \operatorname{arcoth}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) - \lambda = \operatorname{artanh}(\sqrt{r}) - \lambda .$

- On obtient ainsi de même :

$$\tanh\left(\frac{ct}{2}\right) = \tanh[\operatorname{artanh}(\sqrt{r}) - \lambda] = \frac{\sqrt{r} - \tanh(\lambda)}{1 - \sqrt{r} \tanh(\lambda)} ; \quad \beta_e'' = -\frac{1 - \tanh(\frac{ct}{2})\sqrt{\frac{1}{r}}}{\tanh(\frac{ct}{2}) - \sqrt{\frac{1}{r}}} = \tanh(\lambda) .$$

- On retrouve que $\beta_e'' = \tanh(\lambda(r))$ n'a aucune irrégularité pour $t = 0$ (si cette valeur est atteinte).
 ♦ remarque : d'un autre point de vue, compte tenu de la symétrie, ceci ne préjuge en rien que le diagramme de Kruskal-Szekeres doive ou non être interprété modulo π .