

## RG VII - MÉTRIQUE DE LEMAÎTRE

### 1. Singularité de Schwarzschild

- Avec la variable radiale  $r$  “classique”, les composantes temporelle et radiale de la métrique de Schwarzschild comportent une singularité apparente :

$$ds^2 = A(r) c^2 dt^2 - C(r) dr^2 - r^2 d\Omega^2 ; A = 1 - \frac{r_s}{r} ; C = \frac{1}{A} ; r_s = \frac{2GM}{c^2} .$$

Les coordonnées “isotropes” proposent un point de vue différent sur ce problème, mais d'autres sont intéressantes, parmi lesquelles celles de Lemaître.

☞ remarque : contrairement à ce que suggère la métrique isotrope, on suppose ici que  $r$  a une variation monotone ( $r < r_s$  au delà de l'horizon) ; la singularité est ici supposée due aux contractions de longueurs et dilatations de durées, à cause d'un repérage statique inadapté.

### 2. Transformation de Lemaître

#### 2.1. Notations de base

- À l'approche de la singularité (“horizon”), la vitesse des particules en chute libre tend forcément vers  $c$  ; leur immobilité devient impossible. Ceci semble pouvoir s'interpréter en supposant que l'espace est en mouvement centripète par rapport au repérage de Schwarzschild.

Pour étudier ce que subit une particule en chute libre, Lemaître envisage de considérer un repérage comobile, par rapport auquel cette particule est fixe. Une “simple” transformation de Lorentz locale n'est pas forcément facile à intégrer ; on peut chercher une transformation jouant un rôle analogue.

- En limitant à la partie radiale (pour simplifier) :  $ds^2 = A \cdot \left[ c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{A^2} \right] .$

On peut alors chercher avec les combinaisons :

$$dR = c dt + \kappa(r) \frac{dr}{A} ; c dT = c dt + f(r) \frac{dr}{A} .$$

Pour  $\kappa(r) > 0$ , ce repérage est en mouvement centripète par rapport au précédent, puisque  $dR = 0$  correspond à :  $dr = -\frac{A}{\kappa} c dt$ . On peut préciser que la vitesse d'entraînement est :  $v_e = \frac{d\ell}{dt_{\text{loc}}} = \frac{\sqrt{C} dr}{\sqrt{A} dt} = -\frac{c}{\kappa}$ .

◇ remarque : on raisonne ici avec  $A > 0$  et  $C > 0$  dans l'intention de savoir s'il est possible d'extrapoler dans la zone  $r < r_s$ .

• Ceci donne :  $\frac{dr}{A} = \frac{dR - c dT}{\kappa - f}$  ;  $c dt = \frac{f dR - \kappa c dT}{f - \kappa}$  ; les termes croisés dans  $ds^2$  s'éliminent si et seulement si :  $\kappa = \frac{1}{f}$ . Ceci correspond à :  $f = -\beta_e$  ; la transformation de Lemaître est analogue à une transformation de Lorentz.

On obtient ainsi :


$$ds^2 = A \cdot \left[ \frac{\kappa^2 - 1}{(f - \kappa)^2} c^2 dT^2 - \frac{1 - f^2}{(f - \kappa)^2} dR^2 \right] = A \cdot \left[ \frac{1}{1 - f^2} c^2 dT^2 - \frac{f^2}{1 - f^2} dR^2 \right].$$

Finalement :  $ds^2 = \frac{A}{1 - f^2} [c^2 dT^2 - f^2 dR^2]$ . La singularité est donc éliminée avec :  $f(r) = \pm \sqrt{\frac{r_s}{r}}$ .

◇ remarque : la métrique obtenue  $ds^2 = c^2 dT^2 - f^2 dR^2$  a une forme telle que le temps  $T$  est souvent nommé "temps propre" ; ce n'est toutefois le temps propre  $T = \tau$  que pour les particules immobiles ( $dR = 0$ ,  $d\theta = 0$ ,  $d\phi = 0$ ).

• La simplification semble n'intervenir que pour une vitesse d'entraînement particulière, correspondant à une chute libre avec vitesse "initiale" (limite) nulle à l'infini. Lemaître cherchait un repérage comobile, mais dans ce référentiel particulier toutes les particules (et non seulement celles en comouvement) peuvent traverser l'horizon sans subir de singularité.

Cela signifie-il que l'espace physique est en contraction à cette vitesse particulière (comme l'éther des anciennes théories) ? Il faudrait étudier les référentiels comobiles pour les particules ayant d'autres vitesses.

 *exercices n° I, II et III.*

## 2.2. Expressions des coordonnées

- Avec le signe positif ( $\kappa > 0$ ) on obtient :  $d(R - c T) = (\kappa - f) \frac{dr}{A} = \sqrt{\frac{r}{r_s}} dr$  ;  
l'intégration donne :  $R - c T = \frac{2r}{3} \sqrt{\frac{r}{r_s}}$ .

Ceci correspond à :  $r = \kappa^2 r_s$ , avec  $\kappa^2 = \left( \frac{3(R - c T)}{2 r_s} \right)^{2/3}$ .

♦ remarque : on peut choisir deux constantes d'intégration arbitraires associées à l'origine de  $R$  et  $T$  ; Lemaître les choisit nulles.

- Ainsi la métrique complète peut s'écrire :

$$ds^2 = c^2 dT^2 - \frac{1}{\kappa^2} dR^2 - r_s^2 \kappa^4 d\Omega^2.$$

Elle présente une singularité spatiale pour  $R - c T = 0$ , donc  $r = 0$  ; inversement  $r = r_s$  donne  $R - c T = \frac{2r_s}{3}$  ne correspondant à aucune singularité.

- On obtient par ailleurs :  $c dt = dR - \kappa \frac{dr}{A} = dR - r_s \frac{2\kappa^4 d\kappa}{\kappa^2 - 1}$  ; l'intégration donne :  $c t = R - \frac{2r_s}{3} \kappa^3 - 2 r_s \kappa + r_s \ln \left( \left| \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \right| \right)$ .

♦ remarque : cela donne aussi :  $c t = c T - 2 r_s \kappa + r_s \ln \left( \left| \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \right| \right)$ .

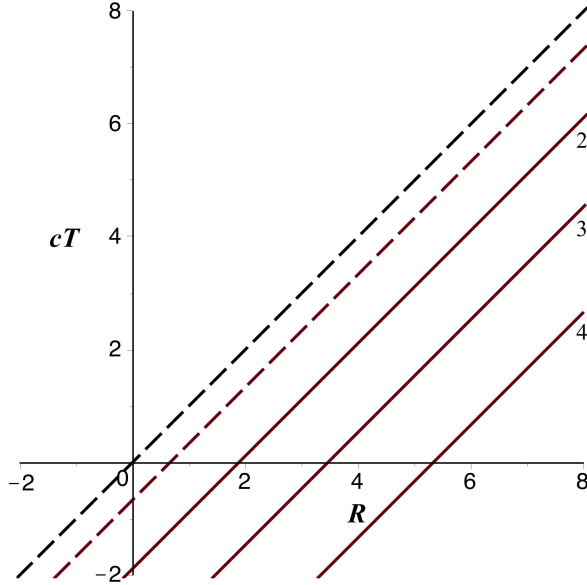
♦ remarque : l'extrapolation est possible pour  $\kappa < 1$  ;  $r < r_s$  ;  $A$  et  $C < 0$  (simplification "heureuse" ?) ; mais on retrouve (comme pour le calcul en coordonnées "classiques") qu'en toute rigueur  $c t$  a une composante imaginaire  $-r_s \arg(\kappa - 1)$ , généralement ignorée ; inversement, ceci semble indiquer que  $R$  et  $c T$  n'en ont pas).

 *exercices n° IV et V.*

## 2.3. Représentations graphiques

- En prenant  $r_s$  comme unité, on peut écrire :  $R - c T = \frac{2}{3} r^{3/2}$  ; les courbes correspondant à  $r = Cste$  sont des droites.

On obtient la représentation suivante (ici pour  $r = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4$ ) ; la partie à gauche de la diagonale n'a pas de signification physique.



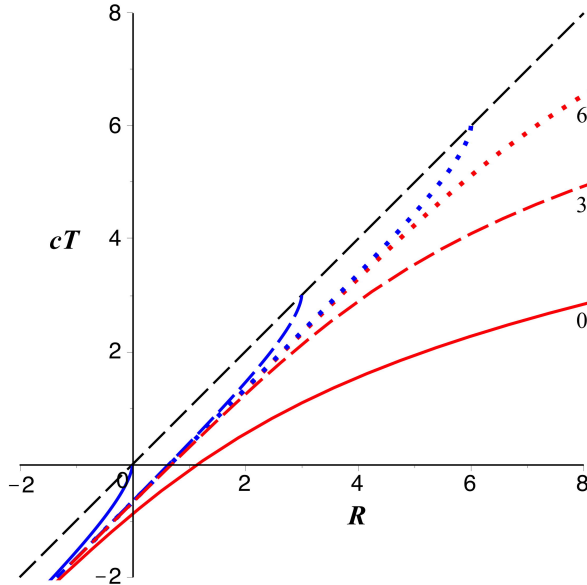
• On peut aussi écrire :  $ct = ct + 2\kappa - \ln\left(\left|\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right|\right)$  et  $R = ct + \frac{2}{3}\kappa^3$  ; ceci définit paramétriquement (en fonction de  $\kappa$ ) les courbes correspondant à  $ct = \text{Cste}$  (ci-après pour  $ct = 0 ; 3 ; 6$ ).

Ces courbes sont constituées de deux branches (vaguement hyperboliques) :

◊ quand  $r > r_s$  (en rouge) on constate que, pour  $R$  fixé,  $ct$  est une fonction croissante de  $ct$  ;

◊ quand  $r < r_s$  (en bleu) la particularité est que, pour  $R$  fixé,  $ct$  est une fonction décroissante de  $ct$  .

◊ remarque : la propriété que la coordonnée  $ct$  décroît pour la partie des trajectoires avec  $r < r_s$  se retrouve de même avec les notations “classiques” (ou avec celles de Kruskal-Szekeres, étudiées dans une partie ultérieure).



- Il est important de noter que les parties en bleu, pour  $r < r_s$ , correspondent à  $\kappa < 1$  donc à une vitesse d'entraînement de norme  $|v_e| = \frac{c}{\kappa} > c$ .

Une interprétation usuelle en est que la métrique statique de Schwarzschild ne serait plus valable dans cette région, car l'espace y serait en "contraction" supraluminique (d'où la présence d'une singularité "apparente" à la limite).

 *exercice n° VI.*

## 2.4. Chute libre radiale d'une particule

- Lors de la chute libre radiale d'une particule, la métrique de Lemaître  $ds^2 = c^2 dT^2 - \frac{1}{\kappa^2} dR^2$  a l'avantage d'être "synchrone" : les droites  $R = Cste$  (lignes de temps) sont des géodésiques.

On peut le vérifier avec le lagrangien  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ c^2 \dot{T}^2 - \frac{1}{\kappa^2} \dot{R}^2 \right]$  donnant les équations du mouvement :

$$c \ddot{T} = \frac{1}{\kappa^3} \dot{R}^2 \frac{\partial \kappa}{\partial T} = -\frac{\dot{R}^2}{2 r_s \kappa^5} ; \quad -\frac{1}{\kappa^2} \ddot{R} = \frac{1}{\kappa^3} \dot{R}^2 \frac{\partial \kappa}{\partial R} = \frac{\dot{R}^2}{2 r_s \kappa^5} .$$

Ainsi  $\dot{R} = 0$  initialement impose  $\ddot{R} = 0$  donc  $R = Cste$ , puis  $c \dot{T} = Cste$ .

Par ailleurs (d'après  $ds^2$ ) :  $1 = c^2 \dot{T}^2 - \frac{1}{\kappa^2} \dot{R}^2$  ; ainsi  $c \dot{T} = \pm 1$  (ou encore  $dT = \pm d\tau$ ). Finalement, dans la mesure où  $c T$  est une fonction croissante de  $c t$  dans la région  $r > r_s$ , on peut considérer  $c \dot{T} = 1$ .

- Pour un point chutant ainsi, le graphique ci-après (représentant  $R = Cste$ ) montre comment  $r$  décroît jusqu'à la limite  $r = r_s$  (pendant que  $t$  tend vers l'infini) ; puis comment  $r$  continue à décroître jusqu'à  $r = 0$  (alors que  $t$  décroît depuis l'infini).

- La représentation dans le plan  $(R, c T)$  peut être précisée en traçant les trajectoires de paires de photons, émises respectivement vers  $R$  décroissant et vers  $R$  croissant, depuis quelques positions intermédiaires de la particule en chute.

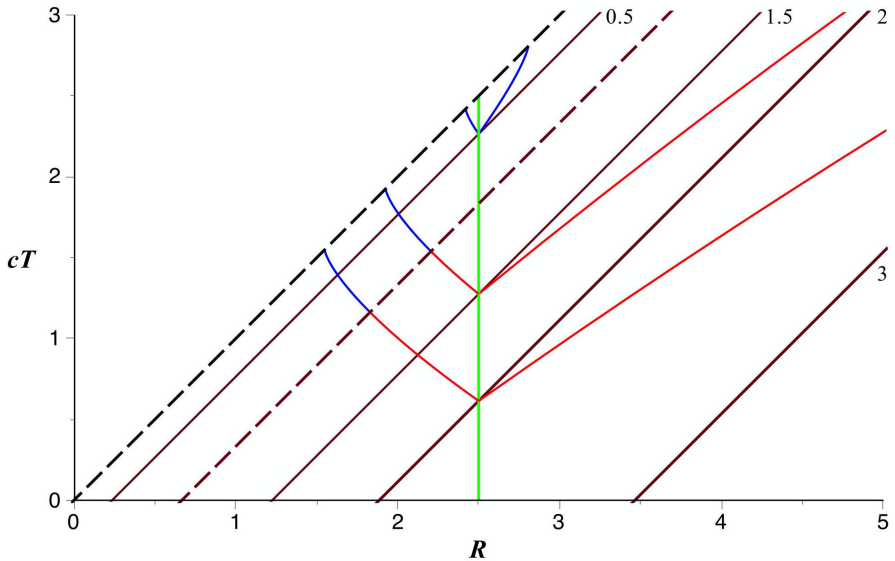
En prenant  $r_s$  comme unité, la relation  $ds^2 = 0$  impose  $dR = \pm \kappa c dT$  avec par ailleurs  $R - c T = \frac{2}{3} \kappa^3$  ceci correspond à :  $(\pm \kappa - 1) c dT = 2 \kappa^2 d\kappa$ .

L'intégration donne :  $c T = \pm \kappa^2 + 2 \kappa \pm 2 \ln(|\pm \kappa - 1|) + Cste$ . Compte tenu de  $R = c T + \frac{2}{3} \kappa^3$ , cela permet une représentation paramétrique des trajectoires.

◇ remarque : ceci pose problème pour les photons "sortants", car devrait s'ajouter à  $c T$  (puis à  $R$ ) une composante imaginaire  $2 r_s \arg(\kappa - 1)$ .

- Ceci visualise les "cônes de lumière", montrant que pour  $r > r_s$  (région I) les droites représentant  $r = Cste$  sont intérieures aux cônes, donc font partie des "trajectoires" a priori possibles (les trajectoires avec  $R = Cste$  ne sont pas les seules ; tout dépend des conditions initiales).

Au contraire pour  $r < r_s$  (région II) de telles trajectoires apparaissent impossibles, la chute vers  $r = 0$  étant inévitable (et elle se fait en un temps propre fini dans la mesure où  $dT \geq d\tau$ ).



◇ remarque : la durée propre finie de cette chute est parfois considérée comme une preuve de l'existence des trous noirs ; c'est en fait une condition nécessaire, mais non forcément suffisante.

◇ remarque : dans ce dernier cas, les trajectoires peuvent partir avec  $R$  croissant, mais pas assez vite pour que cela corresponde à  $r$  croissant.

 *exercice n° VII.*

## 2.5. Anomalie fondamentale de la singularité centrale

- Avec le repérage de Schwarzschild, on a constaté une propriété étrange de la singularité centrale ; pour  $r = 0$  ce point semble immobile au delà de l'horizon, ce qui fait qu'il ne peut pas être doté de propriétés physiques.

Or, après effondrement d'un astre en trou noir, toute la matière est annihilée et cette singularité devrait être l'unique source du champ gravitationnel. Seule une possible inadaptation des coordonnées semblait alors expliquer cette anomalie.

- Il est donc important de reprendre le raisonnement avec le repérage de Lemaître.

La propriété  $r = 0$  correspond à  $dR = c \, dT$  et la vitesse de la singularité (par rapport aux particules en comouvement) est alors :  $v = f \frac{dR}{dT} = c \sqrt{\frac{r_s}{r}} = \infty$ .

Pour un point atteint au bout d'une durée propre finie, cela rend la théorie tout à fait contradictoire.

◇ remarque : il en est de même, symétriquement, pour le repérage en expansion étudié dans la suite.

### 3. Espace en expansion

#### 3.1. Notations de base

- Il est à noter qu'en partant de la même métrique de Schwarzschild, mais avec une vitesse d'expansion ( $v_e = -\frac{c}{\kappa}$  où  $\kappa = -\sqrt{\frac{r}{r_s}}$  ;  $\kappa$  et  $f$  négatifs), on aboutit à une métrique de la forme de Lemaître (où seul  $\kappa^2$  apparaît).

Afin de conserver un même sens pour les axes de  $r$  et  $R$ , avec  $\kappa < 0$ , il faut alors toutefois utiliser des combinaisons de la forme :

$$-dR = c \, dt + \kappa(r) \frac{dr}{A} ; \quad c \, dT = c \, dt + f(r) \frac{dr}{A}.$$

#### 3.2. Expressions des coordonnées

- Pour  $d(R + c \, T) = \sqrt{\frac{r}{r_s}} \, dr$ , l'intégration donne :  $R + c \, T = \frac{2r}{3} \sqrt{\frac{r}{r_s}}$ .

Ceci correspond ici encore à :  $r = \kappa^2 r_s$ , mais dans l'expression de la métrique  $\kappa^2 = \left(\frac{3(R+c \, T)}{2r_s}\right)^{2/3}$ , bien que cela corresponde à la même valeur de  $r$ .

- On obtient par ailleurs :  $c \, dt = -dR - \kappa \frac{dr}{A} = -dR - r_s \frac{2\kappa^4 d\kappa}{\kappa^2 - 1}$  ; l'intégration donne :  $c \, t = -R - \frac{2r_s}{3} \kappa^3 - 2r_s \kappa + r_s \ln\left(\left|\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right|\right)$ .

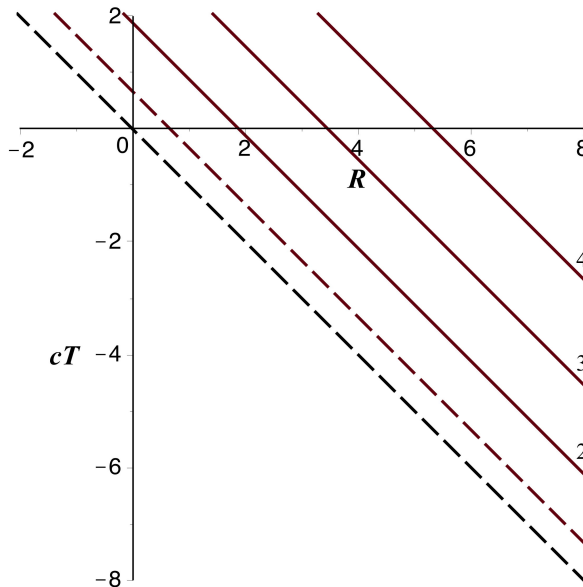


◊ remarque : cela donne aussi :  $c t = c T - 2 r_s \kappa + r_s \ln \left( \left| \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \right| \right)$ , ici encore avec une composante imaginaire  $-r_s \arg(\kappa - 1)$ , généralement ignorée.

### 3.3. Représentations graphiques

• En prenant  $r_s$  comme unité, on peut écrire :  $R + c T = \frac{2}{3} r^{3/2}$  ; les courbes correspondant à  $r = Cste$  sont des droites.

On obtient la représentation suivante (ici pour  $r = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4$ ) ; la partie à gauche de la diagonale n'a pas de signification physique.



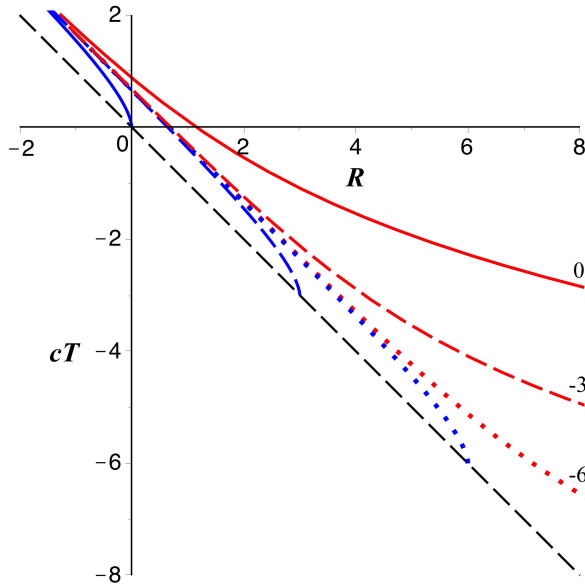
• On peut aussi écrire :  $c T = c t + 2 \kappa - \ln \left( \left| \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \right| \right)$  et  $R = -c T - \frac{2}{3} \kappa^3$  ; ceci définit paramétriquement (en fonction de  $\kappa$ ) les courbes correspondant à  $c t = Cste$  (ci-après pour  $c t = 0 ; 3 ; 6$ ).

Ces courbes sont constituées de deux branches (vaguement hyperboliques) :

◊ quand  $r > r_s$  (en rouge) on constate que, pour  $R$  fixé,  $ct$  est une fonction croissante de  $ct$  ;

◊ quand  $r < r_s$  (en bleu) la particularité est que, pour  $R$  fixé,  $ct$  est une fonction décroissante de  $ct$  .

• Il est important de noter que les parties en bleu, pour  $r < r_s$  , correspondent à  $|\kappa| < 1$  donc à une vitesse d'entraînement de norme  $v_e = \frac{c}{|\kappa|} > c$  . L'interprétation peut en être que la métrique statique de Schwarzschild ne serait plus valable dans cette région, car l'espace y serait en "expansion" supraluminique (d'où la présence d'une singularité "apparente" à la limite).



 *exercice n° VIII.*

### 3.4. "Ascension libre" radiale d'une particule

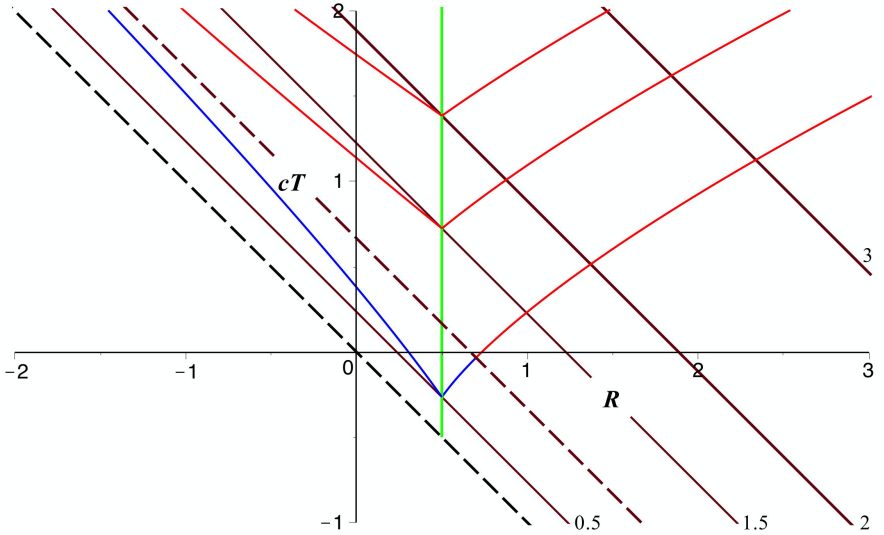
• Lors de "l'ascension libre" radiale d'une particule, la métrique de Lemaître étant "synchrone", les droites  $R = Cste$  (lignes de temps) sont des géodésiques. Ces trajectoires sont parcourues dans le sens de  $r$  croissant.

• La représentation dans le plan  $(R, cT)$  peut être précisée en traçant les trajectoires de paires de photons, émises respectivement vers  $R$  décroissant et vers  $R$  croissant, depuis quelques positions intermédiaires de la particule en ascension.

En prenant  $r_s$  comme unité, la relation  $dR = \pm \kappa c dT$  avec  $R + cT = -\frac{2}{3} \kappa^3$  donne ici :  $(\pm \kappa + 1) c dT = -2 \kappa^2 d\kappa$ .

L'intégration donne :  $cT = \mp \kappa^2 + 2 \kappa \mp 2 \ln(|\pm \kappa + 1|) + Cste$ .

Avec  $R = -cT - \frac{2}{3} \kappa^3$ , cela permet une représentation paramétrique des trajectoires.



♦ remarque : ici de même, pour les photons “entrants”, devrait s'ajouter à  $cT$  (puis à  $R$ ) une composante imaginaire  $2 r_s \arg(\kappa + 1)$ .

• Les trajectoires avec  $R = Cste$  peuvent “sortir” de la zone  $r < r_s$ , celles avec  $R$  croissant peuvent sortir plus vite.

Pour  $r > r_s$  (région III) les droites représentant  $r = Cste$  sont intérieures aux cônes, donc font partie des "trajectoires" a priori possibles. Selon les conditions initiales, des particules peuvent se déplacer vers les  $r$  décroissants, mais semblent tendre asymptotiquement vers  $r = r_s$  et il n'est pas évident de savoir si elles peuvent ou non "rentrer".

Au contraire pour  $r < r_s$  (région IV) de telles trajectoires apparaissent impossibles ; l'expulsion vers  $r = r_s$  semblant inévitable, mais de façon analogue celle limite ne peut être "atteinte" qu'asymptotiquement.

♦ remarque : dans ce dernier cas, les trajectoires peuvent partir avec  $R$  décroissant, mais pas assez vite pour que cela corresponde à  $r$  décroissant.

### 3.5. Comparaison contraction-expansion

- Ces comportements différents, obtenus pour la même forme de métrique, ne sont pas incompatibles entre eux puisqu'ils correspondent à des interprétations différentes du plan  $(R, cT)$  ; les variables de mêmes noms ne désignent pas les mêmes quantités.
- À ce point du raisonnement, il semble que la métrique de Lemaître ne correspond pas à une, mais à deux vitesses possibles (opposées).

Le fait que ces vitesses particulières soient déduites de la méthode pourrait ici encore suggérer que cela corresponde à un mouvement de l'espace physique, dans un sens ou dans l'autre. Il est alors intéressant de revenir sur le calcul de la partie 2.1, pour savoir si les référentiels comobiles avec les particules ayant d'autres vitesses radiales présentent ou non une singularité.