

MÉTRIQUE DE LEMAÎTRE - corrigé des exercices

I. Transformation de Lemaître et transformation de Lorentz

- Pour $v_e = -c \sqrt{\frac{r_s}{r}}$, la transformation de Lorentz (locale) correspond à :

$$d\underline{R} = \frac{d\ell - \beta_e c dt_{\ell oc}}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} ; c dT = \frac{c dt_{\ell oc} - \beta_e d\ell}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} ; c dt_{\ell oc} = \sqrt{A} c dt ; d\ell = \sqrt{C} dr \text{ (algébrique).}$$

♦ remarque : on considère des variations infinitésimales dans l'espace tangent, donc sans varier β_e .

♦ remarque : on raisonne pour $r > r_s$ (A et $C > 0$), puis on vérifie que le prolongement est possible.

- Ceci donne : $d\underline{R} = \sqrt{\frac{r_s}{r}} c dt + \frac{dr}{A}$; $c dT = c dt + \sqrt{\frac{r_s}{r}} \frac{dr}{A}$. On constate que $d\underline{R} = \sqrt{\frac{r_s}{r}} dR$.

• La métrique limitée au déplacement radial serait ainsi encore plus simple que celle de Lemaître : $ds^2 = c^2 dT^2 - d\underline{R}^2$. En particulier les trajectoires des photons seraient des droites ($d\underline{R} = \pm c dT$).

• Le problème est ensuite de déterminer $r(\underline{R}, cT)$ pour exprimer la partie angulaire de la métrique, mais aussi pour savoir interpréter à quoi correspond $r = r_s$. Puisqu'on part de fonctions de r , il faut déterminer $\underline{R}(r, cT)$ et $cT(r, cT)$ (ou des combinaisons) puis inverser. Or on constate que $d\underline{R}(r, cT)$ n'est pas une différentielle totale : il n'existe pas de telle fonction $\underline{R}(r, cT)$ définie de façon univoque dans tout l'espace-temps. Pour obtenir une primitive il faut multiplier $d\underline{R}$ par un facteur intégrant $F(r, cT)$ tel que $\frac{\partial}{\partial r} \left(F \sqrt{\frac{r_s}{r}} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{A} \right)$. Rétrospectivement, on comprend donc que Lemaître a utilisé le facteur $F = \sqrt{\frac{r}{r_s}}$ et qu'il a ainsi obtenu la variable R .

II. Transformation de Lemaître et transformation de Lorentz

- Pour $v_e = -c \sqrt{\frac{r_s}{r}}$, la transformation de Lorentz (locale) correspond à :

$$d\underline{R} = \frac{d\ell - \beta_e c dt_{\ell oc}}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} ; c dT = \frac{c dt_{\ell oc} - \beta_e d\ell}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} ; c dt_{\ell oc} = \sqrt{A} c dt ; d\ell = \sqrt{C} dr \text{ (algébrique).}$$

• Généralement on raisonne pour $r > r_s$ (A et $C > 0$), puis on vérifie que le prolongement est possible. Ainsi avec $v_e = \frac{d\ell}{dt_{\ell oc}} = \frac{dr}{A dt}$ le résultat reste possible, même si $d\ell$ et $dt_{\ell oc}$ posent problème.

- Ceci donne : $d\underline{R} = \sqrt{\frac{r_s}{r}} c dt + \frac{dr}{A}$; $c dT = c dt + \sqrt{\frac{r_s}{r}} \frac{dr}{A}$.

• On multiplie ensuite par un facteur intégrant pour obtenir une différentielle totale :

$$dR = \sqrt{\frac{r_s}{r}} d\underline{R} = c dt + \sqrt{\frac{r}{r_s}} \frac{dr}{A}.$$

• Pour $r < r_s$ (A et $C < 0$), la variable r devient du genre temps et la variable t devient du genre espace. Comment peut-on continuer à considérer que la vitesse d'entraînement est $v_e = \frac{d\ell}{dt_{\ell oc}}$ (avec les notations précédentes) dans ces conditions ?

• On peut alors proposer de réinterpréter : $d\ell = \sqrt{-A} c dt$; $c dt_{\ell oc} = -\sqrt{-C} dr$ (pour conserver un sens croissant de l'évolution temporelle). Ainsi : $v_e = \frac{d\ell}{dt_{\ell oc}} = A c^2 \frac{dt}{dr} = -c \sqrt{\frac{r}{r_s}}$. Il est inattendu d'aboutir à la conclusion que le mouvement n'est pas supraluminique ; d'autant plus que cette vitesse tend vers zéro pour $r \rightarrow 0$, ce qui correspondrait à un champ gravitationnel répulsif.

• Il est tout autant inattendu de constater que si on applique la transformation de Lorentz avec cette expression, on obtient ainsi le même résultat qu'avec les notations "classiques" :

$$d\underline{R} = \frac{\sqrt{-A} c dt - \sqrt{\frac{r}{r_s}} \sqrt{-C} dr}{\sqrt{1 - \frac{r}{r_s}}} = \frac{\sqrt{\frac{r_s}{r}} \sqrt{-A} c dt - \sqrt{-C} dr}{\sqrt{-A}} = \sqrt{\frac{r_s}{r}} c dt + \frac{dr}{A}.$$

• On obtient de même : $c dT = c dt + \sqrt{\frac{r_s}{r}} \frac{dr}{A}$. Les coordonnées de Lemaître paraissent donc "justifiées", mais avec une toute autre interprétation.

III. Repérage de Lemaître

- 1.a. • Pour une métrique de la forme : $ds^2 = c^2 dT^2 - C(R - cT) dR^2 - D(R - cT) d\Omega^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 \text{ (avec } x_0 = cT) ; g_{11} = -C ; g_{22} = -D ; g_{33} = -D \sin^2(\theta) ; \\ g^{00} &= 1 ; g^{11} = -\frac{1}{C} ; g^{22} = -\frac{1}{D} ; g^{33} = -\frac{1}{D \sin^2(\theta)} ; \\ \Gamma_{110} &= -\Gamma_{011} = \frac{C'}{2} ; \Gamma_{220} = -\Gamma_{022} = \frac{D'}{2} ; \Gamma_{330} = -\Gamma_{033} = \sin^2(\theta) \frac{D'}{2} ; \\ \Gamma_{111} &= -\frac{C'}{2} ; \Gamma_{221} = -\Gamma_{122} = -\frac{D'}{2} ; \Gamma_{331} = -\Gamma_{133} = -\frac{D'}{2} \sin^2(\theta) ; \\ \Gamma_{332} &= -\Gamma_{233} = -D \sin(\theta) \cos(\theta) ; \\ \Gamma_{11}^0 &= -\frac{C'}{2} ; \Gamma_{10}^1 = \frac{C'}{2C} ; \Gamma_{22}^0 = -\frac{D'}{2} ; \Gamma_{20}^1 = -\frac{D'}{2} \sin^2(\theta) ; \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{30}^3 = -\frac{D'}{2D} ; \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{C'}{2C} ; \Gamma_{22}^1 = -\frac{D'}{2C} ; \Gamma_{33}^1 = -\frac{D'}{2C} \sin^2(\theta) ; \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{31}^3 = \frac{D'}{2D} ; \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin(\theta) \cos(\theta) ; \Gamma_{32}^3 = \cotan(\theta) . \end{aligned}$$

- 1.b. • Si on cherche la métrique dans le vide entourant l'astre, les équations du champ correspondent à : $R_{\mu\nu} = 0$; en simplifiant (ces quatre équations à deux inconnues ne sont pas indépendantes) :

$$\begin{aligned} (2C C'' - C'^2) D^2 + 2C^2 (2D D'' - D'^2) &= 0 \quad (R_{00}) ; \\ C (2D D'' - D'^2) - D C' D' &= 0 \quad (R_{01}) ; \\ (2C C'' - C'^2) D^2 - 2C (2D D'' - D'^2) + 2D C' D' (C + 1) &= 0 \quad (R_{11}) ; \\ 2C D'' (C - 1) + C' D' (C + 1) + 4C^2 &= 0 \quad (R_{22} \text{ et } R_{33}) . \end{aligned}$$

- 2.a. • La seconde équation peut s'écrire : $2 \frac{D''}{D'} - \frac{C'}{C} - \frac{D'}{D} = 0$; on en déduit : $\frac{D'^2}{C D} = Cste$.

• Les combinaisons $(R_{00} + C R_{11})$ et/ou $(R_{00} - 2C R_{01})$ donnent : $2 \frac{C''}{C'} - \frac{C'}{C} + 2 \frac{D'}{D} = 0$; on en déduit : $\frac{D'^2 D^2}{C} = Cste$.

- 2.b. • En comparant ces deux équations : $D^{-3/2} \frac{dD}{dC} = Cste$; on en déduit : $D^{-1/2} = Cste.C + Cte'$.

• Connaissant la solution obtenue par Lemaître, on peut se limiter au cas : $D C^2 = Cste$.

- 2.c. • En reportant, on obtient (avec $X = R - cT$) : $C^{-5/2} \frac{dC}{dX} = Cste$; on en déduit : $C = \frac{Cste}{X^{2/3}}$.

• Ces résultats sont tout à fait conformes à la solution de Lemaître : $D C^2 = r_s^2$; $C = \left(\frac{2r_s}{3X}\right)^{2/3}$; on en confirme ainsi la validité, puisqu'il n'apparaît aucune singularité pour $r = r_s$.

3. • La quatrième équation (non utilisée) n'est pas indépendante ; compte tenu de sa plus grande complexité, on peut se limiter à vérifier sa compatibilité. En notant : $C = \lambda X^{-2/3}$ et $D = \mu X^{4/3}$ le report dans cette équation donne simplement : $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{9}{4}$. La solution de Lemaître correspond à $\lambda = \left(\frac{2r_s}{3}\right)^{2/3}$ et vérifie $\frac{\mu}{\lambda} = \frac{r_s^2}{\lambda^3} = \frac{9}{4}$.

IV. Expressions des coordonnées

• On peut écrire : $c dt = dR - \kappa \frac{dr}{A}$ avec : $r = \kappa^2 r_s$, donc $dr = 2 r_s \kappa d\kappa$; $A = \frac{r - r_s}{r} = \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2}$.

• Ainsi : $c dt = dR - r_s \frac{2\kappa^4 d\kappa}{\kappa^2 - 1} = dR - r_s \frac{\kappa^3 d\kappa}{\kappa - 1} - r_s \frac{\kappa^3 d\kappa}{\kappa + 1}$.

• Avec la variable intermédiaire $u = \kappa - 1$ on obtient : $\frac{\kappa^3 d\kappa}{\kappa - 1} = \frac{(u^3 + 3u^2 + 3u + 1) du}{u}$. Une primitive est : $\frac{u^3}{3} + 3 \frac{u^2}{2} + 3u + \ln(|u|) = \frac{(\kappa - 1)^3}{3} + 3 \frac{(\kappa - 1)^2}{2} + 3(\kappa - 1) + \ln(|\kappa - 1|) = \frac{\kappa^3}{3} + \frac{\kappa^2}{2} + \kappa - \frac{11}{6} + \ln(|\kappa - 1|)$.

• Avec la variable intermédiaire $u = \kappa + 1$ on obtient : $\frac{\kappa^3 d\kappa}{\kappa + 1} = \frac{(u^3 - 3u^2 + 3u - 1) du}{u}$. Une primitive est : $\frac{u^3}{3} - 3 \frac{u^2}{2} + 3u - \ln(|u|) = \frac{(\kappa + 1)^3}{3} - 3 \frac{(\kappa + 1)^2}{2} + 3(\kappa + 1) - \ln(|\kappa + 1|) = \frac{\kappa^3}{3} - \frac{\kappa^2}{2} + \kappa + \frac{11}{6} - \ln(|\kappa + 1|)$.

• Au total on obtient (Lemaître choisit la constante nulle) : $c t = R - \frac{2r_s}{3} \kappa^3 - 2r_s \kappa + r_s \ln\left(\left|\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}\right|\right)$.

♦ remarque : cela correspond aussi à : $c t = c T - 2 r_s \kappa + r_s \ln \left(\left| \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \right| \right)$.

♦ remarque : il reste le problème de la composante imaginaire $r_s \arg(\kappa \pm 1)$.

V. Accélération relative du repérage de Schwarzschild

1.a. • Un point "fixe" ($r = r_0 = Cste$) dans le repérage de Schwarzschild correspond à :

$$R - c T = \frac{2 r_0}{3} \sqrt{\frac{r_0}{r_s}} = Cste.$$

• Cela correspond à : $\frac{dR}{dT} = c$ et $\frac{d^2 R}{dT^2} = 0$; pourtant, le point fixe considéré accélère par rapport au repérage de Lemaître puisque la réciproque est forcément vraie, par construction.

1.b. • On obtient par ailleurs : $c^2 d\tau^2 = c^2 dT^2 - \frac{1}{\kappa^2} dR^2 = c^2 dT^2 \left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \right)$, où $\kappa^2 = \left(\frac{3(R-cT)}{2r_s} \right)^{2/3} = \frac{r_0}{r_s}$.

Ainsi : $\frac{dT}{d\tau} = \sqrt{\frac{\kappa^2}{\kappa^2-1}} = \sqrt{\frac{r_0}{r_0-r_s}}$.

• On en déduit : $\frac{dR}{d\tau} = c \sqrt{\frac{r_0}{r_0-r_s}}$ puis $\frac{d^2 R}{d\tau^2} = 0$... étrange, non ?...

• Le référentiel de Lemaître est un référentiel d'inertie pour toutes les particules en comouvement, qui y évoluent avec $R = Cste$. Le champ de gravitation y disparaît pour ces particules ; de ce fait elles y ont un mouvement rectiligne uniforme.

• Ce n'est pas un référentiel d'inertie pour les autres particules : celles qui sont lancées verticalement vers le haut par rapport au repérage de Schwarzschild, puis retombent, n'ont pas un mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel de Lemaître (leur mouvement sous l'effet de la gravitation se déduit des équations du mouvement pour ce repérage).

• Pour rester immobile par rapport au repérage de Schwarzschild, un point matériel n'est pas en mouvement libre, il doit être soumis à des forces qui compensent le champ gravitationnel qu'il subit. Il se trouve qu'un tel point a, par construction, un mouvement rectiligne uniforme avec le repérage de Lemaître.

• Ceci vient du fait qu'on a effectué une transformation de Lorentz avec une vitesse d'entraînement ne dépendant que de r (et non pas fonction de t et indépendante de r) ; pour une valeur fixe de r la vitesse locale par rapport au repérage de Lemaître est forcément toujours la même, d'où une accélération locale nulle.

2. • La contradiction apparente vient du fait que, en même temps qu'il est localement en contraction par rapport au repérage de Schwarzschild, celui de Lemaître est globalement en expansion. Deux particules de référence (en chute libre pour Schwarzschild) sont immobiles à R constant pour Lemaître, mais leur distance augmente avec T . La distance séparant deux valeurs fixes de R correspond à l'intégrale de $d\ell = \frac{1}{\kappa} dR$; quand T augmente pour R fixé, κ diminue et $d\ell$ augmente.

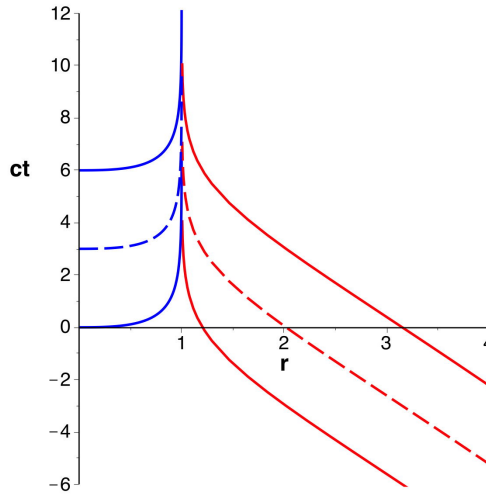
• Pour connaître l'accélération par rapport à un observateur fixe de Lemaître, il faut ajouter la vitesse d'expansion à la vitesse de déplacement local (ici constante). L'accélération observée avec le repérage de Schwarzschild correspond donc ici à l'accélération d'expansion, associée à la dérivée de $\frac{1}{\kappa} = -\frac{v_e}{c}$, donc effectivement liée à la vitesse d'entraînement.

• Pour calculer la vitesse relative, l'effet d'expansion n'intervient qu'au second ordre puisqu'on prend la limite d'un déplacement infinitésimal ; on obtient localement des vitesses opposées. Au contraire pour calculer l'accélération relative (calcul du second ordre), on compare des vitesses en des points différents, donc l'effet d'expansion intervient ; si on n'en tient pas compte on ne trouve pas des accélérations opposées.

VI. Représentations graphiques

1. • En prenant r_s comme unité, on peut écrire : $r = \kappa^2$ et $c t = R - \frac{2}{3} \kappa^3 - 2 \kappa + \ln \left(\left| \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \right| \right)$; ceci définit paramétriquement (en fonction de κ) les courbes correspondant à $R = Cste$ (ci-après pour $R = 0$; 3 ; 6).

◊ remarque : il reste le problème de la composante imaginaire $r_s \arg(\kappa \pm 1)$.



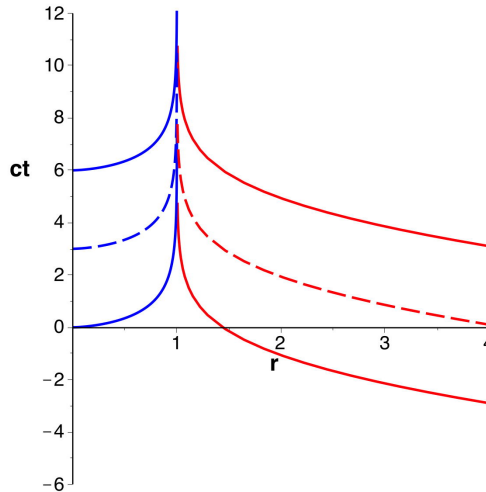
• Ces courbes sont constituées de deux branches (vaguement hyperboliques) :

- ◊ quand $r > r_s$ (en rouge) on constate que, pour ct fixé, R est une fonction croissante de r ;
- ◊ quand $r < r_s$ (en bleu) la particularité est que, pour ct fixé, R décroît en fonction de r .

2. • On peut aussi écrire : $r = \kappa^2$ et $ct = cT - 2\kappa + \ln\left(\left|\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right|\right)$; ceci définit paramétriquement (en fonction de κ) les courbes correspondant à $cT = \text{Cste}$ (ci-après pour $cT = 0 ; 3 ; 6$).

• Ces courbes sont constituées de deux branches (vaguement hyperboliques) ; on y constate que, pour r fixé, cT est partout une fonction croissante de ct .

◊ remarque : en comparant ces courbes aux précédentes, on vérifie graphiquement que $R \approx cT$ pour $\kappa \approx 0$ (début des courbes en bleu) ; en outre l'écart $R - cT$ dépend seulement de r (et non de ct).



VII. Trajectoires des photons

• Dans le plan (R, cT) les trajectoires des photons correspondent à la relation $ds^2 = 0$. En prenant r_s comme unité pour simplifier, ceci impose la relation $dR = \pm \kappa c dT$ avec par ailleurs $R - cT = \frac{2}{3} \kappa^3$

correspond à : $(\pm \kappa - 1) c dT = 2 \kappa^2 d\kappa$. Ainsi : $c dT = \frac{2 \kappa^2 d\kappa}{\pm \kappa - 1}$.

• Avec la variable intermédiaire $u = \pm \kappa - 1$ on obtient : $\frac{\kappa^2 d\kappa}{\pm \kappa - 1} = \pm \frac{(u^2 + 2u + 1) du}{u}$.

- Une primitive est :

$$\pm \left[\frac{u^2}{2} + 2u + \ln(|u|) \right] = \pm \left[\frac{(\pm\kappa-1)^2}{2} + 2(\pm\kappa-1) + \ln(|\pm\kappa-1|) \right] = \pm \frac{\kappa^2}{2} + \kappa \mp \frac{3}{2} + \ln(|\pm\kappa-1|) .$$

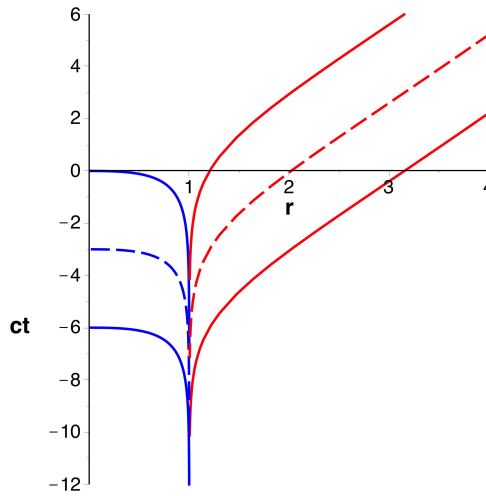
- L'intégration donne finalement : $c T = \pm\kappa^2 + 2\kappa \pm 2 \ln(|\pm\kappa-1|) + Cste$.

◊ remarque : pour les photons sortants, il apparaît une composante imaginaire $2 r_s \arg(\kappa-1)$ généralement omise.

- Avec $R = c T + \frac{2}{3} \kappa^3$, cela permet une représentation paramétrique des trajectoires.

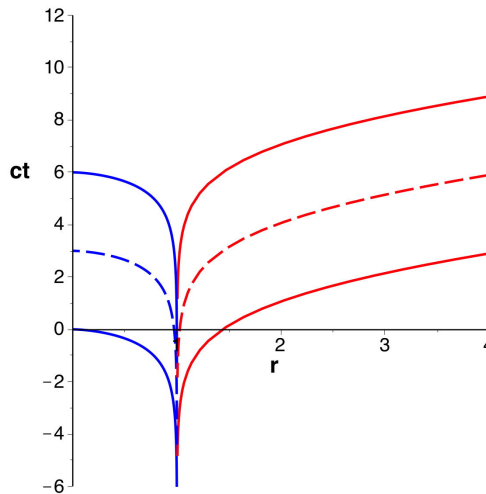
VIII. Représentations graphiques

- La zone "expansion" est essentiellement caractérisée par $\kappa < 0$.
 - Avec r_s comme unité, on obtient : $r = \kappa^2$ et $c t = -R - \frac{2}{3}\kappa^3 - 2\kappa + \ln\left(\left|\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right|\right)$; ceci définit paramétriquement (en fonction de κ) les courbes correspondant à $R = Cste$ (ci-après pour $R = 0 ; 3 ; 6$).
◊ remarque : il reste le problème de la composante imaginaire $r_s \arg(\kappa \pm 1)$.



- Ces courbes sont constituées de deux branches (vaguement hyperboliques) :
 - ◊ quand $r > r_s$ (en rouge) on constate que, pour $c t$ fixé, R est une fonction croissante de r ;
 - ◊ quand $r < r_s$ (en bleu) la particularité est que, pour $c t$ fixé, R décroît en fonction de r .

- On peut aussi écrire : $r = \kappa^2$ et $c t = c T - 2\kappa + \ln\left(\left|\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right|\right)$; ceci définit paramétriquement (en fonction de κ) les courbes correspondant à $c T = Cste$ (ci-après pour $c T = 0 ; 3 ; 6$).



• Ces courbes sont constituées de deux branches (vaguement hyperboliques) ; on y constate que, pour r fixé, cT est partout une fonction croissante de ct .

◊ remarque : en comparant ces courbes aux précédentes, on vérifie graphiquement que $R \approx -cT$ pour $\kappa \approx 0$ (début des courbes en bleu) ; en outre la somme $R + cT$ dépend seulement de r (et non de ct).