MÉTRIQUE DE LEMAÎTRE - exercices

I. Transformation de Lemaître et transformation de Lorentz

• La transformation de Lemaître joue un rôle analogue à celui d'une transformation de Lorentz. Appliquer cette dernière pour un référentiel comobile par rapport à une particule en chute libre radiale, provenant de l'infini avec une vitesse “initiale” (limite) nulle ; commenter le résultat obtenu.

II. Transformation de Lemaître et transformation de Lorentz

• La transformation de Lemaître joue un rôle analogue à celui d'une transformation de Lorentz. Pour un référentiel comobile par rapport à une particule en chute libre radiale, provenant de l'infini avec une vitesse “initiale” (limite) nulle, on peut appliquer la transformation de Lorentz sans problème tant que $r > r_s$, mais la généralisation pour $r < r_s$ pose un problème dans la mesure où la variable r devient du genre temps et la variable t devient du genre espace.

• Dans cette zone $r < r_s$, redéfinir la vitesse d'entraînement du référentiel comobile en tenant compte des propriété des coordonnées r et t, puis montrer qu'on obtient ainsi la même transformation de Lemaître (mais avec une autre interprétation) ; commenter les résultats obtenus.

III. Repérage de Lemaître

1. • Dans l'élaboration du repérage de Lemaître, une faiblesse de raisonnement vient du fait que dans la région $r < r_s$ on l'a obtenu par extrapolation de la méthode, en partant d'un référentiel non valide et en appliquant une transformation de Lorentz non valide. On souhaite ici conforter le résultat.

• On considère un astre créant dans le vide environnant un champ à symétrie sphérique et on suppose qu'on peut se ramener à une métrique de la forme : $ds^2 = c^2\, dT^2 - C(R - c\,T)\, dR^2 - D(R - c\,T)\, d\Omega^2$.

a) Exprimer dans ce cas la connexion : $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ et $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$.

b) D'après les équations du champ de gravitation, en déduire les relations déterminant C et D.

2. a) Montrer que ces équations impliquent : $\frac{D'^2}{C\,D} = Cste$ et $\frac{D'^2\, D^2}{C} = Cste$.

b) En déduire que, pour le cas étudié, on peut considérer : $D\, C^2 = Cste$.

c) En déduire la forme des expressions pour C et D ; commenter.

3. • Vérifier que les équations non indépendantes de celles utilisées (deux suffisent) sont compatibles avec la solution obtenue.

IV. Expressions des coordonnées

• Déterminer l'expression de $ct(R, cT)$ pour la métrique de Lemaître.

V. Accélération relative du repérage de Schwarzschild

1. • Avec le repérage de Lemaître, on souhaite calculer l'accélération relative d'un point fixe de coordonnée r_0 dans le référentiel de Schwarzschild.

a) Calculer $\frac{d^2R}{dT^2}$ pour ce point ; commenter.

b) Calculer $\frac{d^2R}{d\tau^2}$; commenter.

2. • Expliquer l'influence de la dépendance de la métrique de Lemaître par rapport à T.

VI. Représentations graphiques

1. • Représenter graphiquement les courbes $R(r, c\,t) = Cste$; commenter.

2. • Représenter graphiquement les courbes $c\,T(r, c\,t) = Cste$; commenter.

VII. Trajectoires des photons

• Déterminer les trajectoires des photons dans le plan $(R, c\,T)$.

VIII. Représentations graphiques

• Dans le plan $(R, c\,T)$ on considère la zone décrivant l'aspect “expansion” de la métrique de Lemaître.

1. • Représenter graphiquement les courbes $R(r, c\,t) = Cste$; commenter.

2. • Représenter graphiquement les courbes $c\,T(r, c\,t) = Cste$; commenter.