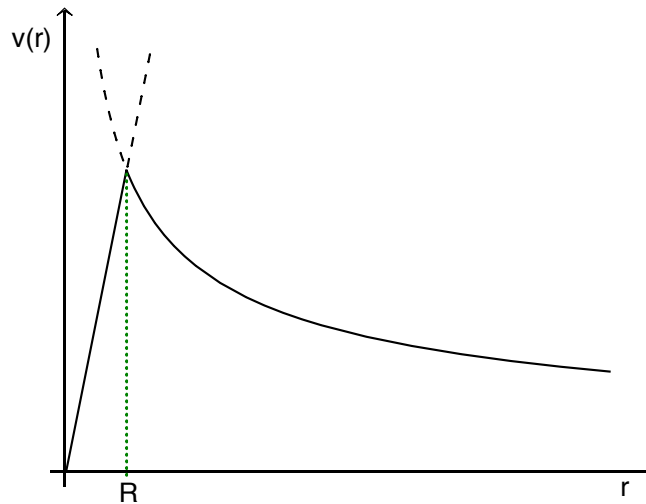


## MATIÈRE NOIRE ; LAGRANGIEN EN $f(R)$ ... - corrigé des exercices

### I. Modélisation d'une galaxie

- On raisonne dans l'approximation newtonienne car les corrections relativistes sont qualitativement négligeables dans le cas étudié.
  - La vitesse d'une étoile en rotation circulaire de rayon  $r$ , autour d'un astre de masse  $M$ , peut s'écrire :  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ . Cela peut s'appliquer aux étoiles des bras de la galaxie si on suppose que leur action gravitationnelle est négligeable en comparaison de celle du noyau galactique.
  - D'après le théorème de Gauss, l'action du noyau sphérique de rayon  $R$  sur chacune de ses étoiles est limitée à celle de la masse  $M(r) = M \frac{r^3}{R^3}$  contenue dans la sphère concentrique de rayon  $r$ . La vitesse correspondante est ainsi :  $v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} r$ .
  - La variation de  $v(r)$  a l'allure suivante (approximation très basique mais qualitativement efficace) :



- Une vitesse  $v(r)$  indépendante de  $r$  correspondrait à  $\frac{M(r)}{r} = Cste$ .
  - La répartition de masse correspond à :  $dM = 4\pi r^2 \mu(r) dr$  ; la relation précédente imposerait alors :  $dM = Cste dr$ , donc une répartition de masse de la forme :  $\mu(r) = \frac{Cste}{r^2}$ . C'est parce que la matière visible ne suit pas cette loi qu'on recherche une éventuelle "matière noire" (non visible).
  - ♦ remarque : la loi  $\mu \propto \frac{1}{r^2}$  correspond à ce qui est prédit pour un fluide ultra-relativiste en équilibre.

### II. Accélération d'un point en chute libre radiale

- La vitesse de chute peut s'écrire :  $v = \frac{d\ell}{dt_{loc}} = \frac{\sqrt{C} dr}{\sqrt{A} dt}$ .
  - L'intégration de l'équation temporelle du mouvement radial donne :  $A c \frac{dt}{ds} = Cste$ .
  - D'après les conditions initiales :  $dr = 0$  ;  $ds = \sqrt{A_0} c dt$ , où  $A_0 = A(r_0)$  ; ainsi :  $A c \frac{dt}{ds} = \sqrt{A_0}$ .
  - L'intégration de l'équation radiale est moins simple et le résultat peut se déduire de la métrique :
$$ds^2 = A c^2 dt^2 - C dr^2 \quad \text{avec} \quad ds^2 = \frac{A^2}{A_0} c^2 dt^2 ;$$

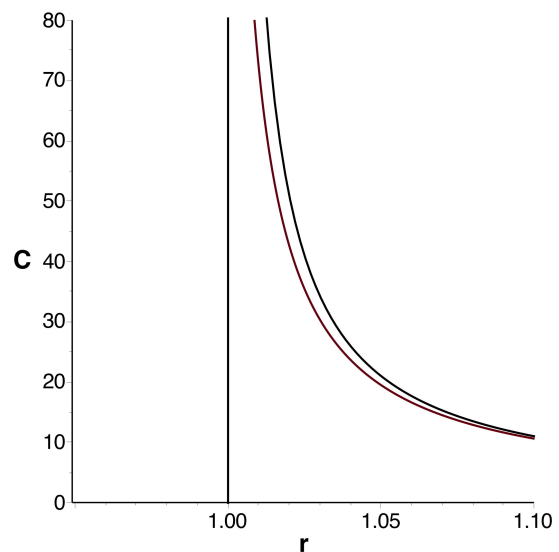
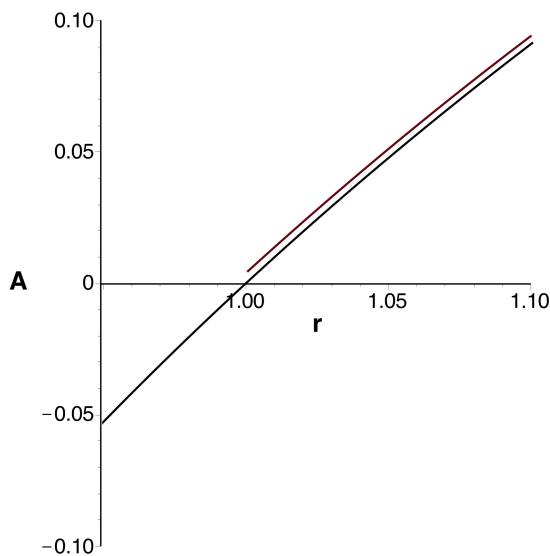
$$C dr^2 = A \cdot \left(1 - \frac{A}{A_0}\right) c^2 dt^2 ;$$

$$\frac{dr}{dt} = -c \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}} \sqrt{1 - \frac{A}{A_0}} ; \quad v = -c \sqrt{1 - \frac{A}{A_0}} .$$

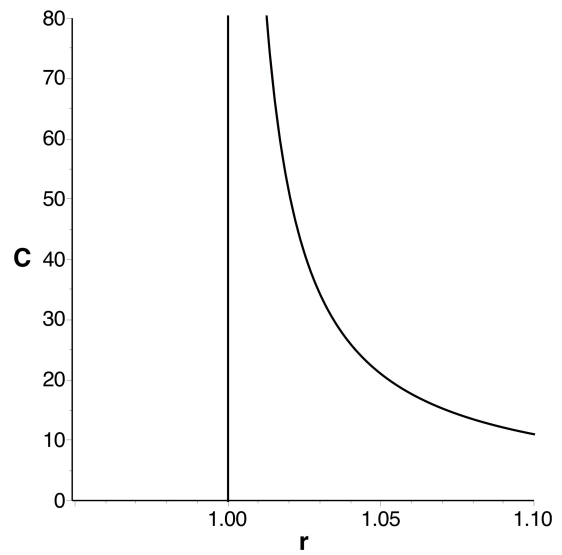
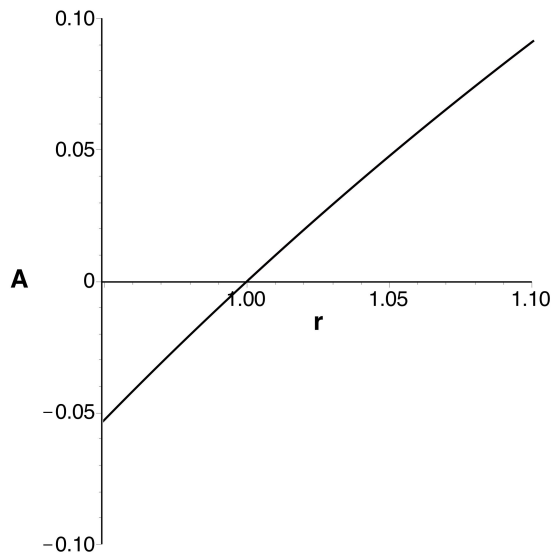
2. • L'accélération peut s'écrire :  $a(t) = \frac{dv}{dt_{loc}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt}$ .
- ◊ remarque : on utilise le fait qu'ici localement la vitesse ne dépend que de  $r$ .
- Ensuite :  $\frac{dv}{dr} = \frac{c}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{A}{A_0}}} \frac{A'}{A_0}$  ;  $a(t) = -\frac{c^2}{2\sqrt{C}} \frac{A'}{A_0}$ .
- Finalement à l'instant initial (en omettant l'indice associé à  $r_0$  pour simplifier) :  $a = -\frac{c^2}{2\sqrt{C}} \frac{A'}{A}$ .

### III. Intégration numérique de l'effet Unruh

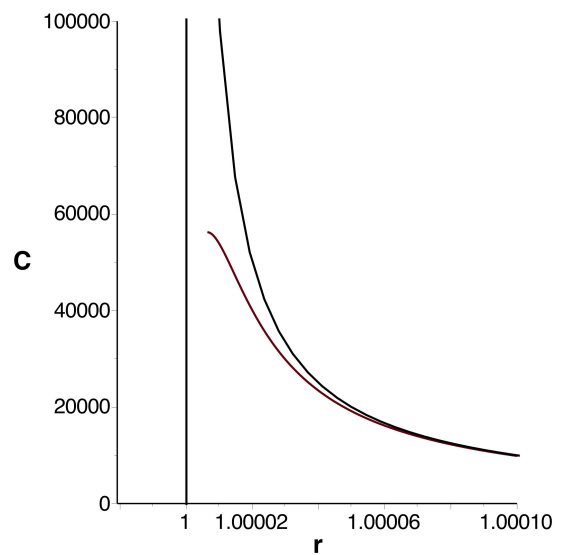
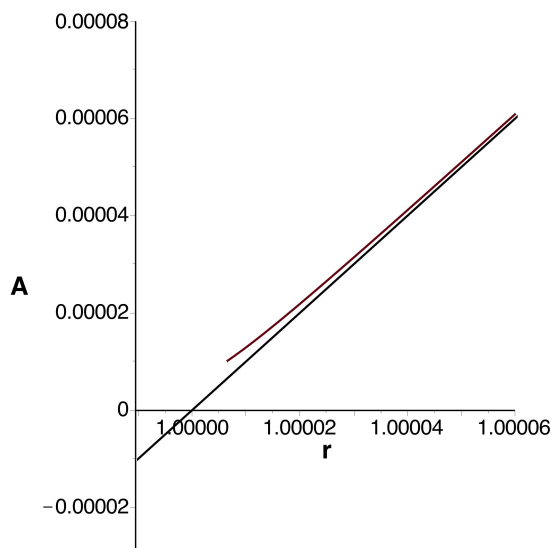
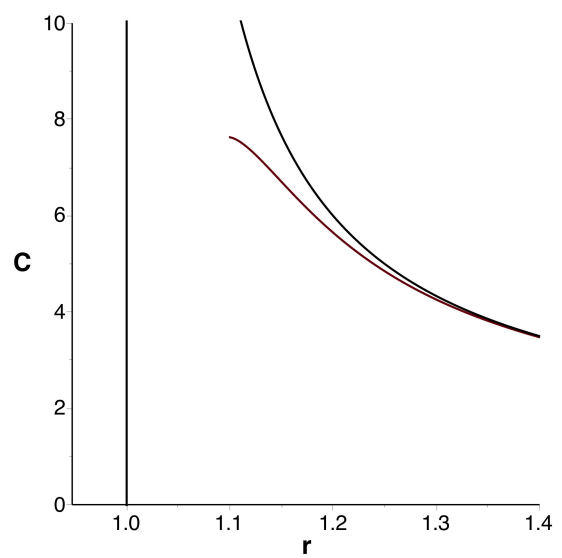
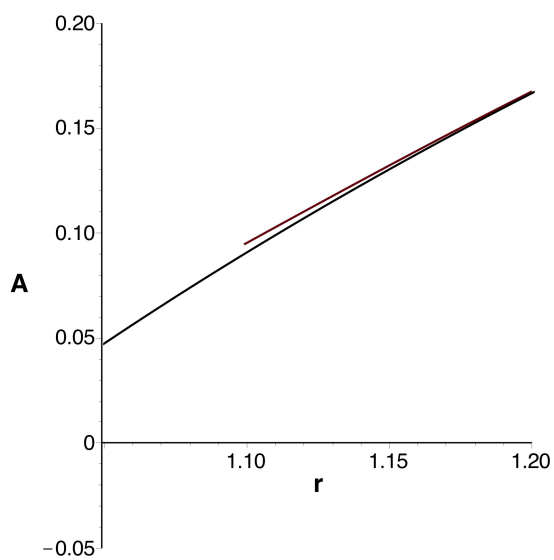
- 1.a. • Pour une méthode d'Euler il faut pouvoir isoler une expression de la dérivée. La première équation ne dépend que de  $A'$  (et non de  $C'$ ) :  $\frac{A'}{A} - \frac{C-1}{r} = \frac{r}{C} \eta \left(\frac{A'}{A}\right)^4$ .
- En prenant comme condition limite le résultat "classique" de Schwarzschild à une distance assez grande pour que le terme correctif soit négligeable, mais pas trop pour limiter les propagations d'incertitudes des calculs numériques, la résolution numérique donne deux solutions réelles pour  $A'$  ; la comparaison avec le cas limite montre que c'est la plus petite qui convient.
- ◊ remarque : le fait de devoir choisir "à la main" l'une des deux valeurs de la dérivée bloque les logiciels de calcul formel.
- La dérivée  $C'$  est alors obtenue en reportant dans l'autre équation :  $\frac{C'}{C} + \frac{C-1}{r} = \frac{r}{C} \eta \cdot \left(\frac{A'}{A}\right)^4$ .
- Les dérivées  $A'$  et  $C'$  permettent de calculer  $A$  et  $C$  au point suivant, puis ainsi de suite.
- 1.b. • Pour s'assurer que la méthode est acceptable, on peut tester si la solution "classique" est correctement retrouvée pour le cas  $\eta = 0$ . On constate ainsi que la précision est insuffisante à l'échelle où on souhaite étudier le terme correctif.



- 2.a. • Avec la méthode au premier ordre, on calcule la dérivée en un point pour estimer la variation jusqu'au point suivant, mais cette variation dépend de la pente moyenne sur l'intervalle.
- Pour obtenir un calcul du second ordre, en tenant compte de la variation de la dérivée, on fait une première approximation du point suivant, d'où on déduit une estimation de la dérivée en ce point. Pour ré-estimer plus précisément le point suivant, on utilise ensuite comme dérivée la moyenne des valeurs obtenues aux deux extrémités de l'intervalle. On constate que la précision est ainsi raisonnablement correcte (l'écart est inférieur à l'épaisseur du tracé).

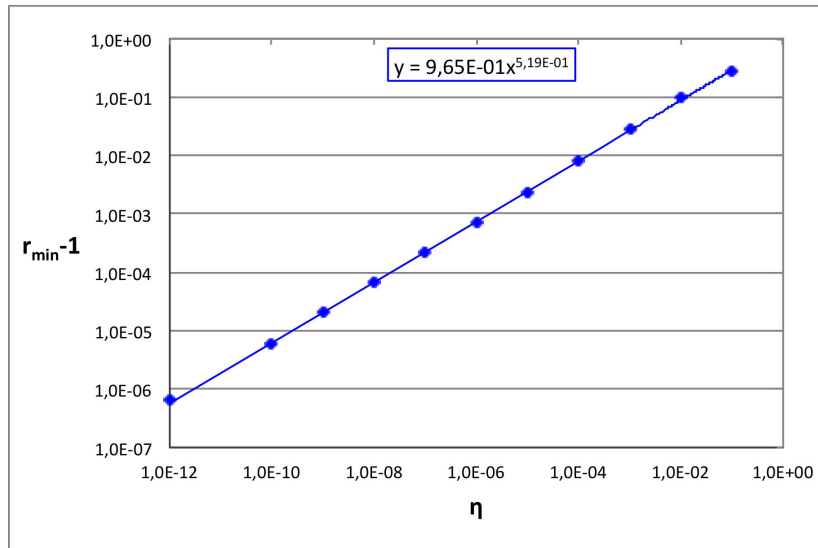


- 2.b. • On obtient des comportements très semblables pour  $\eta$  allant de  $10^{-2}$  à  $10^{-10}$  ; on note toutefois (principalement pour  $A$ ) que cette dernière valeur montre la limite de la méthode d'Euler au second ordre.



♦ remarque : pour  $\eta$  plus petit, il ne suffit pas d'augmenter le nombre de chiffres significatifs dans le logiciel, il faut aussi utiliser une méthode d'Euler à un ordre encore plus grand.

• Pour toutes les valeurs de  $\eta$  accessibles, on constate qu'il existe une valeur minimum de  $r$  en dessous de laquelle l'intégration numérique ne permet plus de résoudre le système d'équations :  $r_{\min} \approx 1 + \sqrt{\eta}$  (avec  $r_s$  comme unité). Cette limite correspond à un maximum de  $C$ .



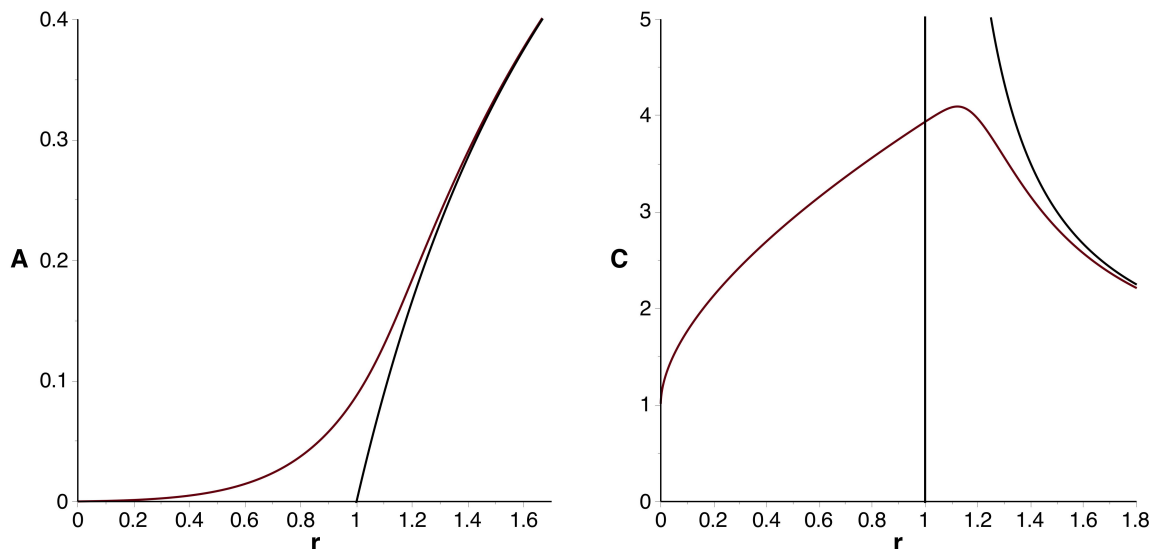
#### IV. Effet de type Unruh à l'ordre 3

- Les équations sont analogues et peuvent s'écrire sous la forme ( $C$  peut se simplifier à droite) :

$$\frac{A'}{A} - \frac{C-1}{r} = \frac{r}{\sqrt{C}} \frac{\eta}{3} \left(\frac{A'}{A}\right)^3 ; \quad \frac{C'}{C} + \frac{C-1}{r} = \frac{r}{\sqrt{C}} \eta \cdot \left(\frac{A'}{A}\right)^3.$$

• La constante  $\eta$  correspond ici à une longueur ; on peut donc s'attendre à un comportement quantitatif différent en fonction de sa valeur. Ainsi en pratique c'est plutôt  $\frac{\eta}{r_s}$  qui joue le rôle que tenait  $\frac{\sqrt{\eta}}{r_s}$  pour l'effet Unruh ; l'évolution, en fonction de  $\eta$ , des courbes obtenues dans la suite est en fait analogue.

- Par exemple pour  $\eta = 10^{-1}$  (une valeur plus petite n'apporte qualitativement rien de plus et rend les graphiques moins lisibles), on obtient les courbes suivantes.



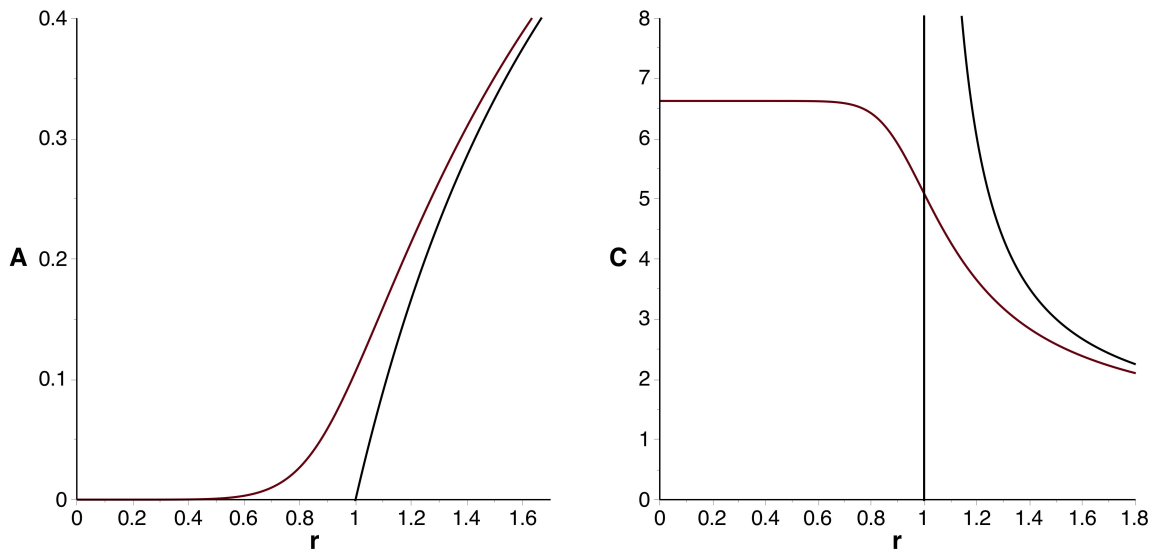


- Il est remarquable de constater que ces courbes peuvent se prolonger jusqu'à  $r \approx 0$  ; la précision de la méthode d'Euler limite toutefois l'intégration d'autant plus qu'on diminue  $\eta$ .
- ◊ remarque : on peut aussi étudier des effets analogues pour diverses valeurs de l'ordre entre 2,5 et 3,6 ; plus on se rapproche de l'ordre 4, plus la partie "intérieure" devient difficile à calculer, puis incalculable à partir de 3,5.
- Cette partie "intérieure", pour laquelle  $C(r)$  croît, ne décrit toutefois pas "une espèce d'astre" en équilibre car elle ne respecte pas la loi de variation de la pression pour un fluide ultra-relativiste :  $A \propto r$  ;  $C = Cste$  et  $p \propto \frac{1}{r^2}$ . Si on se limite à des solutions stables, l'utilisation correcte de ces courbes consisterait à les raccorder avec celles obtenues pour la description de l'intérieur de l'astre.

## V. Effet de type Unruh à l'ordre 2

1. • Les équations sont analogues et peuvent s'écrire sous la forme ( $C$  se simplifie à droite) :  

$$\frac{A'}{A} - \frac{C-1}{r} = r \frac{\eta}{3} \left(\frac{A'}{A}\right)^2 ; \quad \frac{C'}{C} + \frac{C-1}{r} = r \eta \cdot \left(\frac{A'}{A}\right)^2 .$$
  - La constante  $\eta$  est ici sans dimension ; on peut donc s'attendre à un comportement quantitatif différent en fonction de sa valeur. L'évolution, en fonction de  $\eta$ , des courbes obtenues dans la suite est en fait un peu analogue dans la mesure où les variations principales des courbes sont "concentrées" au voisinage de  $r_s$  dans une région d'autant plus petite que  $\eta$  l'est.
2. • Par exemple pour  $\eta = 10^{-1}$  (une valeur plus petite n'apporte qualitativement rien de plus et rend les graphiques moins lisibles), on obtient les courbes ci-après.



- Cette partie "intérieure", pour laquelle  $C(r)$  est quasi constant, ne décrit toutefois pas "une espèce d'astre" en équilibre car elle ne respecte pas la loi de variation de la pression pour un fluide ultra-relativiste :  $A \propto r$  ;  $C = Cste$  et  $p \propto \frac{1}{r^2}$ . Si on se limite à des solutions stables, l'utilisation correcte de ces courbes consisterait à les raccorder avec celles obtenues pour la description de l'intérieur de l'astre.

- 3.a. • Compte tenu de l'allure "régulière" des courbes précédentes, on peut s'intéresser à en trouver des expressions par développement en série en fonction de  $r$  :  

$$A = 1 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots \quad \text{et} \quad C = 1 + c_1 r + c_2 r^2 + \dots \quad (\text{avec les notations "classiques"}).$$

♦ remarque : bien que l'allure des courbes suggère que  $A(0) = 0$ , on en présuppose pas cela dans cette partie ; en outre, puisqu'il intervient seulement  $\frac{A'}{A}$ , on peut utiliser  $a_0 = 1$  (la valeur "réelle" est ensuite à fixer d'après les conditions limites).

• Le report dans les équations donne à l'ordre le plus bas :  $c_0 = 1$ , quel que soit  $\eta$  ; ceci semble en contradiction avec les courbes précédentes.

• On obtient à l'ordre suivant :  $a_1 = c_1$  et  $c_1 = 0$  (donc  $a_1 = 0$ ).

• On obtient ensuite de même :  $2a_2 = c_2$  et  $c_2 = 0$  ; ... ;  $na_n = c_n$  et  $c_n = 0$ .

• Ces résultats donnent finalement :  $A = Cste \neq 0$  et  $C = 1$ , effectivement solution des équations mais incompatibles avec les courbes précédentes obtenues avec l'intégration numérique.

3.b. • Compte tenu de ce qui précède, on peut s'intéresser à des développements en série de la forme :

$$A = r + a_2 r^2 + \dots \quad \text{et} \quad C = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \dots \quad (\text{avec les notations "classiques"}).$$

♦ remarque : puisqu'il intervient seulement  $\frac{A'}{A}$ , on peut utiliser  $a_1 = 1$  (la valeur "réelle" est ensuite à préciser).

• Le report dans les équations donne à l'ordre le plus bas :  $2 - c_0 = \frac{\eta}{3}$  et  $c_0 - 1 = \eta$ . Ceci relie  $c_0$  à  $\eta$ , ce qui semble raisonnable, mais impose aussi  $\eta$  (puisque'il y a deux équations), ce qui est contradictoire : ce paramètre provient d'une correction associée à une loi indépendante de la relativité générale.

• Si on tente tout de même de poursuivre, on obtient à l'ordre suivant :  $a_2 - c_1 = 2a_2 \frac{\eta}{3}$  ainsi que  $\frac{11}{7}c_1 = 2a_2\eta$  ; ceci donne :  $a_2 = 0$  et  $c_1 = 0$  (puis de même pour les coefficients suivants).

• Ces résultats ne sont généralement pas solution des équations pour  $\eta$  quelconque ; ils sont incompatibles avec les courbes précédentes obtenues avec l'intégration numérique.

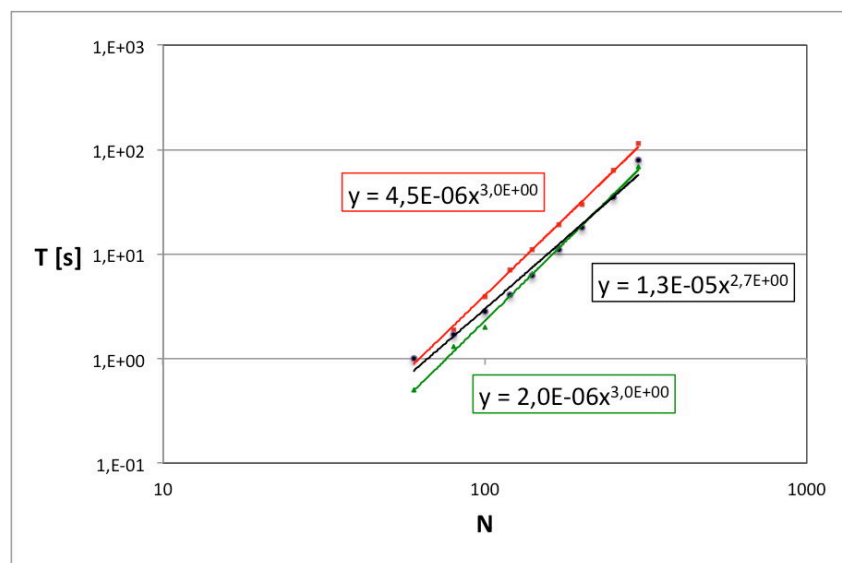
♦ remarque : les résultats sont analogues en supposant  $A = r^n + a_{n+1} r^{n+1} + \dots$ .

3.c. • Ceci indique que l'origine est un point (mathématiquement) singulier de l'équation, de même que pour le maximum de  $C$ .

♦ remarque : quand on fait un calcul analogue pour un terme de type Unruh à l'ordre 3, on obtient un résultat analogue, mais la forme des courbes est différente : avec une tangente à l'origine verticale,  $C(r)$  n'a pas de développement en série simple au voisinage de  $r = 0$  ; ici c'est la régularité apparente des courbes qui montre qu'il existe pour cette limite une propriété singulière dans l'équation.

## VI. Calcul de l'effet Unruh par développement en série

1. • On peut choisir par exemple  $\eta = 10^{-3}$  et effectuer les calculs pour quelques valeurs de  $N$  sur quelques machines et logiciels ; on constate une variation environ comme  $N^3$ .

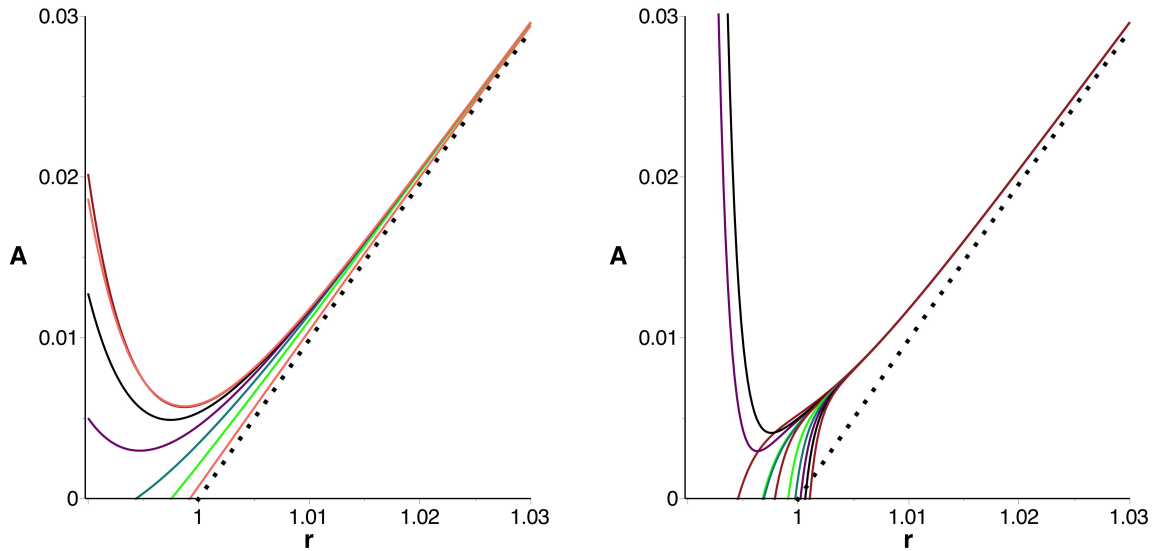


2.a. • Pour obtenir un résultat satisfaisant, il faut effectuer les développements jusqu'à  $N \approx 1500$ .

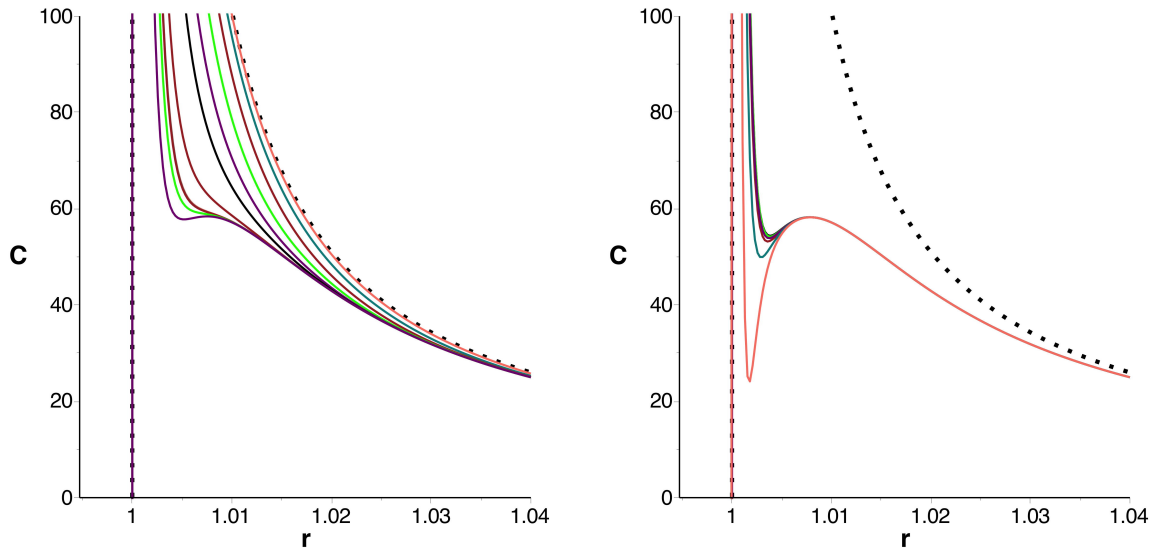
♦ remarque : compte tenu du nombre important de reports d'un calcul numérique dans le suivant, cela nécessite en outre de calculer avec suffisamment de chiffres significatifs (au moins 30).

• Compte tenu du fait que  $N \approx 150$  est nécessaire pour  $\eta = 10^{-2}$ , la comparaison montre qu'il faudrait un ordre  $N \approx 1500000$  pour décrire  $\eta = 10^{-10}$  (limite de la méthode d'Euler) ; on retombe alors dans un problème de temps de calcul (et éventuellement de taille mémoire). Ceci montre que, même si cette méthode numérique peut décrire des valeurs de  $\eta$  plus petites que pour un développement en série littéral, elle semble rester plus limitée que la méthode d'Euler.

- 2.b. • On obtient les allures suivantes, montrant pour  $A$  une “convergence”, puis une divergence (pour  $N \gtrsim 500$ ) de la partie  $r \lesssim 1,003 r_s$  :



- De même pour  $C$  avec divergence (pour  $N \gtrsim 800$ ) de la partie  $r \lesssim 1,003 r_s$  :



• Les valeurs de  $A$  semblent pouvoir être extrapolées jusqu'à  $r \approx 1,003 r_s$ , mais elles sont liées à celles de  $C$  qui ne peuvent être estimées que jusqu'à  $r \approx 1,004 r_s$ , tout de même en deçà du maximum.

• Ces résultats sont tout à fait compatibles avec ceux obtenus par intégration numérique : les courbes obtenues par les deux méthodes se superposent à mieux que 1 % près (incertitudes numériques).

## VII. Calcul de l'effet Unruh par développement en série

1. • On peut pour cela utiliser une variable  $r_1 = r - r_0$  (l'existence de l'extremum correspond à  $c_1 = 0$ ) :  
 $A = 1 + a_1 r_1 + a_2 r_1^2 + \dots$  et  $C = c_0 + c_2 r_1^2 + \dots$  (avec les notations "classiques").  
 ◇ remarque : puisqu'il intervient seulement  $\frac{A'}{A}$ , on peut utiliser  $a_0 = 1$  (la valeur "réelle" est ensuite à fixer d'après les conditions limites).  
 • Les équations sont analogues et peuvent s'écrire sous la forme ( $C$  peut se simplifier à droite) :  

$$\frac{A'}{A} - \frac{C-1}{r_1+r_0} = \frac{r_1+r_0}{C} \frac{\eta}{3} \left(\frac{A'}{A}\right)^4 ; \quad \frac{C'}{C} + \frac{C-1}{r_1+r_0} = \frac{r_1+r_0}{C} \eta \cdot \left(\frac{A'}{A}\right)^4 .$$
  
 ◇ remarque : les dérivées sont par rapport à  $r_1$  puisque  $r_0$  est constant.
  
2. • Le report dans les équations donne, à l'ordre le plus bas, deux équations à trois inconnues pouvant s'écrire sous la forme :  $r_0 a_1 = \frac{4}{3} (c_0 - 1) = \frac{4}{3} \eta \frac{r_0^2 a_1^4}{c_0}$ . On peut en déduire par exemple :  $c_0 = \frac{16 \eta a_1^2}{16 \eta a_1^2 - 9}$  et  $r_0 = \frac{1}{a_1} \frac{12}{16 \eta a_1^2 - 9}$ .  
 ◇ remarque : le fait que ces équations fassent intervenir à la fois  $c_0$  (ordre 0) et  $a_1$  (ordre 1) vient de l'utilisation en facteur de  $r = r_1 + r_0$  (avec décalage de la puissance de  $r_1$ ).  
 ◇ remarque : dans la mesure où on a supposé une tangente horizontale ( $c_1 = 0$ ) en  $r = r_0$ , c'est  $r_0$  qui intervient dans les équations à la place de  $c_1$ .  
 ◇ remarque : les conditions aux limites imposent deux contraintes, ici par exemple  $a_0$  (coefficient multiplicatif restant à déterminer) et  $c_0$  ; les équations du champ donnent alors  $r_0$  et  $a_1$  (conditions sur la pente) ; les équations à l'ordre suivant devraient donner  $a_2$  et  $c_2$ , puis ainsi de suite.  
  
 • Le report dans les équations à l'ordre suivant donne deux équations dont la première se simplifie en  $a_1 = 0$ , ce qui (d'après les relations précédentes) imposerait en outre  $c_0 = 0$  ; ceci est visiblement contradictoire avec les courbes obtenues par les autres méthodes. L'autre équation contient à la fois  $a_2$  et  $c_2$ , mais en y reportant  $a_1 = 0$  elle se réduit à  $c_2 = 0$  (sans contrainte sur  $a_2$ ).  
 • Comment expliquer que pour  $r \geq r_0$ , où les courbes semblent tout de même tout à fait régulières, on ne puisse pas obtenir de développement en série ? Il semble qu'il existe une singularité essentielle de l'équation en  $r_0$  correspondant à l'extremum de  $C$  (il en est d'ailleurs de même à l'origine  $r = 0$ ).
  
3. • À l'ordre le plus bas, le calcul littéral précédent donne des résultats plausibles. Par exemple pour  $\frac{\sqrt{\eta}}{r_s} = 10^{-2}$  les deux autres méthodes donnent  $c_0 = 58,212 \pm 0,015$  pour  $\frac{r_0}{r_s} = 1,0079 \pm 0,0001$  ; ceci peut être obtenu avec les expressions littérales trouvées ici, en choisissant  $a_1 = 75,7527 \pm 0,0002$ .  
 • À l'ordre suivant,  $a_2$  se simplifie alors dans l'équation correspondante, qui ainsi devient impossible (du type "1 = 0" ; par comparaison à la question précédente, c'est lié au fait qu'on a ici choisi  $a_1 \neq 0$ ). L'équation sur  $c_2$  ne peut ensuite être résolue car elle dépend de  $a_2$ .

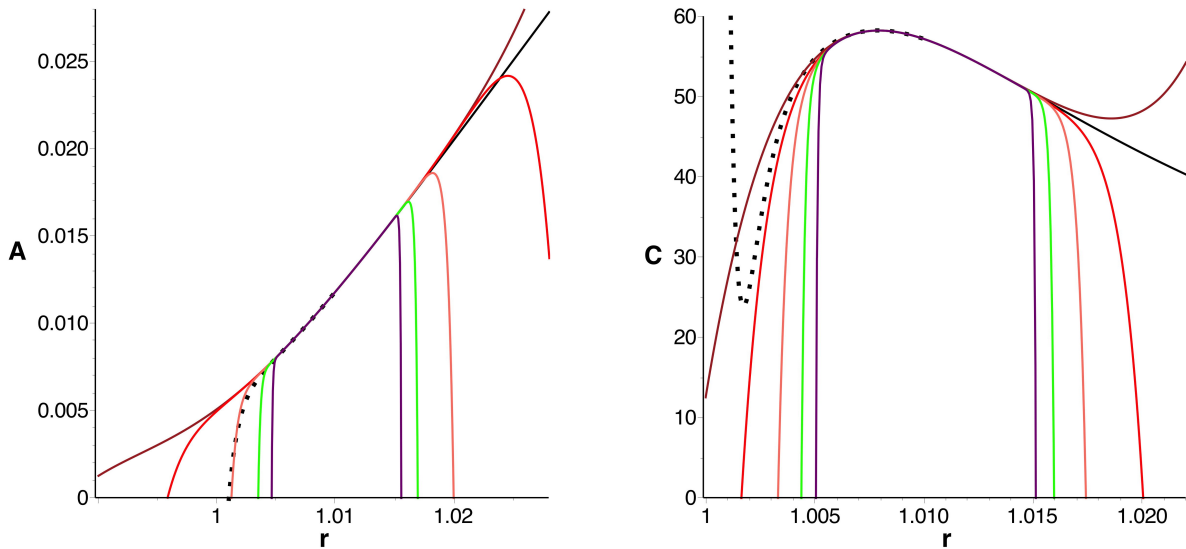
## VIII. Calcul de l'effet Unruh par développements en série

1. • On peut pour cela utiliser une variable  $r_1 = r - r_0$  (où  $r_0$  ne correspond ni à l'origine, ni à l'extremum de  $C$ ) :  $A = 1 + a_1 r_1 + a_2 r_1^2 + \dots$  et  $C = c_0 + c_1 r_1 + c_2 r_1^2 + \dots$  (avec les notations "classiques").  
 ◇ remarque : puisqu'il intervient seulement  $\frac{A'}{A}$ , on peut utiliser  $a_0 = 1$  (la valeur "réelle" est ensuite à fixer d'après les conditions limites).  
 • Les équations sont analogues et peuvent s'écrire sous la forme ( $C$  peut se simplifier à droite) :  

$$\frac{A'}{A} - \frac{C-1}{r_1+r_0} = \frac{r_1+r_0}{C} \frac{\eta}{3} \left(\frac{A'}{A}\right)^4 ; \quad \frac{C'}{C} + \frac{C-1}{r_1+r_0} = \frac{r_1+r_0}{C} \eta \cdot \left(\frac{A'}{A}\right)^4 .$$
  
 ◇ remarque : les dérivées sont par rapport à  $r_1$  puisque  $r_0$  est constant.
  
2. • Le report dans les équations donne, à l'ordre le plus bas, deux équations pouvant s'écrire sous la forme :  $r_0 a_1 - (c_0 - 1) = \frac{\eta}{3} \frac{r_0^2 a_1^4}{c_0}$  ;  $\frac{r_0 c_1}{c_0} + (c_0 - 1) = \eta \frac{r_0^2 a_1^4}{c_0}$ .  
 ◇ remarque : le fait que ces équations fassent intervenir à la fois  $c_0$  (ordre 0) avec  $a_1$  et  $c_1$  (ordre 1) vient de l'utilisation en facteur de  $r = r_1 + r_0$  (avec décalage de la puissance de  $r_1$ ).

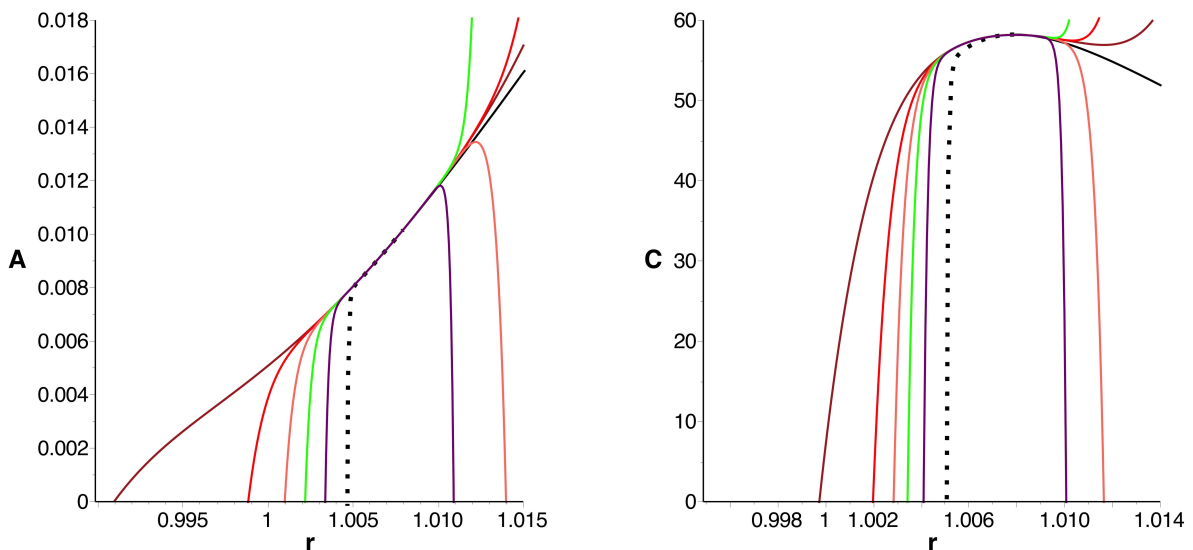
• En pratique  $r_0$  est choisi en fonction de la zone qu'on souhaite étudier (cela peut nécessiter des ajustements en fonction du domaine de validité du développement, qui n'est connu qu'après les calculs) ; les conditions aux limites imposent deux contraintes, ici  $a_0$  (coefficient multiplicatif restant à déterminer) et  $c_0$  ; les équations du champ donnent alors  $a_1$  et  $c_1$  (conditions sur la pente). Les équations à l'ordre suivant donnent ensuite  $a_2$  et  $c_2$ , puis ainsi de suite. Les calculs sont effectués numériquement car les expressions littérales sont inutilement compliquées.

3. • Pour  $\frac{\sqrt{\eta}}{r_s} = 10^{-2}$  les autres méthodes donnent un maximum de  $C$  pour  $r_{extr} = 1,0079 \pm 0,0001$  (en fait  $\frac{r_{extr}}{r_s}$ ) à la limite de validité des calculs ; on peut commencer par vérifier cet extremum à l'aide d'un développement en série pour  $r_0 = 1,010$ . Le raccordement impose  $a_0 = 0,0118$  et  $c_0 = 57,15$  ; on obtient ainsi  $a_1 = 58,78$  et  $c_1 = -917,3$  ... puis ainsi de suite.
- Les courbes obtenues se raccordent bien et confirment l'extremum (en le précisant très peu) ; celles tracées à l'ordre 80 montrent bien la limitation de l'intervalle de validité.



• Pour  $r_0 = 1,007$  le raccordement d'un second développement impose  $a_0 = 0,00946$  et  $c_0 = 57,99$ . On obtient ainsi  $a_1 = 77,79$  et  $c_1 = 405,8$  ... puis ainsi de suite.

♦ remarque : l'équation sur  $A'$  a plusieurs solutions et il faut choisir celle qui permet le raccordement des courbes ; le choix n'est pas le même pour les parties croissante et décroissante de  $C$  (le maximum est un point singulier), donc il faut effectuer un raccordement à l'extremum.



• Ceci permet en principe d'obtenir de proche en proche l'ensemble des courbes, avec une succession de développements raccordés de façon analogue, mais seulement à condition que la méthode ne soit pas limitée par la précision numérique.

- 4.a. • Le report dans les équations montre que l'hypothèse  $C = 1$  impose  $A = Cste$  ; rien a priori n'exclut les solutions de cette forme.
- 4.b. • La quantité  $A$  se comporte un peu qualitativement comme un potentiel de gravitation, donc doit être continue à dérivées continues. Le report dans les équations montre qu'il en est donc de même pour  $C$  (de façon générale, les  $g_{\mu\nu}$  sont des "potentiels").
- 4.c. • Puisque le passage par  $C = 1$  doit se faire avec dérivées continues, on ne peut raccorder à ce niveau une solution avec celle correspondant à  $C = 1$  que si le raccordement se fait avec dérivée nulle (et de même pour  $A = Cste$ ) ; les calculs montrent que ce n'est pas le cas.  
 ♦ remarque : ce point de croisement semble être lui aussi un point singulier ; il faut y raccorder deux développements de part et d'autre.

