MATIÈRE NOIRE ; LAGRANGIEN EN $f(R)$... - exercices

I. Modélisation d'une galaxie

• On souhaite étudier la vitesse de rotation v des étoiles dans une galaxie, en considérant qu'elles sont animées d'un mouvement circulaire uniforme. On suppose qu'on peut modéliser la galaxie comme constituée d'un noyau sphérique de rayon R, entouré (dans un plan) par des bras spiraux dont la masse est très faible en comparaison de celle du noyau.

1. • Justifier qu'on peut raisonner dans l'approximation newtonienne et déterminer la variation de $v(r)$ en fonction du rayon r de l'orbite circulaire de l'étoile considérée.

2. • On observe en fait, dans les bras des galaxies, des vitesses $v(r)$ pratiquement indépendantes de r. Déterminer la répartition de masse volumique $\mu(r)$ qui pourrait expliquer cela.

II. Accélération d'un point en chute libre radiale

• On considère le voisinage d'un astre statique à symétrie sphérique, avec une métrique de la forme :
$ds^2 = A(r)\, c^2\, dt^2 - C(r)\, dr^2 - D(r)\, d\Omega^2$.
• On étudie un point en chute libre radiale, avec un départ immobile en $r = r_0$.

1. • Exprimer la vitesse de chute en fonction du temps.

2. • En déduire l'accélération initiale du point en chute libre.

III. Intégration numérique de l'effet Unruh

• On se propose d'intégrer par une méthode d'Euler le système de deux équations différentielles décrivant l'effet Unruh : $\frac{A'}{A} - \frac{C-1}{r} = \frac{r}{C}\frac{\eta}{3}\left(\frac{A'}{A}\right)^4$; $\frac{C'}{C} + \frac{C-1}{r} = \frac{r}{C}\eta \,.\left(\frac{A'}{A}\right)^4$.

1. a) Préciser la démarche récurrente utilisée par cette méthode.
   b) Proposer une méthode pour tester si la précision obtenue est suffisante ; conclure.

2. a) Préciser une démarche récurrente du second ordre permettant d'améliorer les résultats.
   b) Commenter les résultats obtenus par cette méthode.

IV. Effet de type Unruh à l'ordre 3

1. • On considère un astre statique à symétrie sphérique supposé trou noir. Dans le “vide” environnant, on envisage un effet de type Unruh mais à l'ordre 3 ; exprimer les équations du champ correspondantes.

2. • Intégrer ces équations avec la méthode d'Euler (choisir pour cela une valeur appropriée du coefficient η analogue à celui de l'effet Unruh). Commenter.

V. Effet de type Unruh à l'ordre 2

1. • On considère un astre statique à symétrie sphérique supposé trou noir. Dans le “vide” environnant, on envisage un effet de type Unruh mais à l'ordre 2 ; exprimer les équations du champ correspondantes.

2. • Intégrer ces équations avec la méthode d'Euler (choisir pour cela une valeur appropriée du coefficient η analogue à celui de l'effet Unruh). Commenter.

3. • Étudier la possibilité de développements en série au voisinage de $r = 0$, pour les coefficients de la métrique $A(r)$ et $C(r)$.

VI. Calcul de l'effet Unruh par développement en série

• On considère un astre statique à symétrie sphérique supposé trou noir. Dans le “vide” environnant, on étudie les équations décrivant le champ en incluant l'effet Unruh :

$$\frac{A'}{A} - \frac{C-1}{r} = \frac{r}{C}\frac{\eta}{3}\left(\frac{A'}{A}\right)^4 \quad ; \quad \frac{C'}{C} + \frac{C-1}{r} = \frac{r}{C}\eta \cdot \left(\frac{A'}{A}\right)^4 .$$

• Avec la notation de Binet $u = \frac{1}{r}$, on intègre par développement en série au voisinage de $u \approx 0$. On pose pour cela (avec r_s comme unité) :

$A_0 = 1 - u$ et $C_0 = \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots$ (solution “classique”) ;

$A = A_0 + A_\eta$ et $C = C_0 + C_\eta$.

• Le report dans les équations donne par récurrence les coefficients $A_{\eta n}$ de A_η et $C_{\eta n}$ de C_η.

1. • Le développement littéral nécessite des calculs très longs : augmentant, en fonction de l'ordre N, comme N^8, on choisit donc ici de calculer numériquement les coefficients. Au moyen de quelques essais dans un logiciel de calcul formel, estimer la variation du temps de calcul en fonction de N dans ce cas.

2. a) Effectuer les calculs pour $\eta = 10^{-4}$ (soit en fait $\frac{\sqrt{\eta}}{r_s} = 10^{-2}$) et déterminer l'ordre N nécessaire pour obtenir un résultat satisfaisant (d'une efficacité comparable à celle obtenue par la méthode d'Euler).
b) Préciser la comparaison avec l'intégration par la méthode d'Euler.

VII. Calcul de l'effet Unruh par développement en série

1. • Dans la mesure où un développement en série “au voisinage de l'infini” semble montrer l'existence d'un extremum de $C(r)$ pour une valeur de r_0 en dessous de laquelle le calcul semble impossible, on peut chercher s'il existe des développements de A et C au voisinage de l'extremum.
• Préciser les notations et exprimer les équations du champ correspondantes.

2. • Étudier les coefficients des développements qu'imposent les équations ; commenter.

3. • Comparer les résultats obtenus littéralement, à l'ordre le plus bas, avec ceux obtenus par les autres méthodes (développement en série au voisinage de l'infini et intégration numérique par la méthode d'Euler).

VIII. Calcul de l'effet Unruh par développements en série

1. • Dans la mesure où un développement en série “au voisinage de l'infini” semble montrer l'existence d'un extremum de $C(r)$ pour une valeur de r_{extr} en dessous de laquelle le calcul semble impossible, on peut chercher s'il existe des développements de A et C en r_0 voisin mais différent de l'extremum.
• Préciser les notations et exprimer les équations du champ correspondantes.

2. • Étudier les coefficients des développements qu'imposent les équations ; commenter.

3. • Comparer les développements obtenus numériquement (au voisinage de l'extremum de C) avec ceux obtenus par les autres méthodes (développement en série au voisinage de l'infini et intégration numérique par la méthode d'Euler). Commenter (en particulier à savoir si une telle méthode peut permettre d'obtenir l'ensemble des courbes).

4. a) Justifier qu'il existe une solution avec $C = 1$ et $A = Cste$.
b) Justifier que les fonctions A et C doivent être continues et à dérivées continues.

c) Si une solution atteint la valeur $C = 1$, est il possible de la raccorder en ce point avec la solution particulière évoquée ci-dessus ?