

MÉTRIQUE DE NOVIKOV - corrigé des exercices

I. Particules en chute libre verticale

1.a. • Pour la chute : $v = -c \sqrt{1 - \frac{A}{A_0}} = \frac{dr}{A dt}$.

• Ainsi (avec r_s comme unité) : $c dt = -\frac{\sqrt{A_0} dr}{A \sqrt{A_0 - A}} = -\sqrt{r_0 - 1} \frac{r^2 dr}{(r-1) \sqrt{r \cdot (r_0 - r)}}$.

• En décomposant : $\frac{r^2}{r-1} = r + 1 + \frac{1}{r-1} = -\frac{1}{2}(-2r + r_0) + \left(1 + \frac{r_0}{2}\right) + \frac{1}{r-1}$ on peut écrire :
 $\frac{r^2}{(r-1) \sqrt{r \cdot (r_0 - r)}} dr = -\frac{1}{2} \frac{-2r + r_0}{\sqrt{r \cdot (r_0 - r)}} dr + \left(1 + \frac{r_0}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{r \cdot (r_0 - r)}} dr + \frac{1}{(r-1) \sqrt{r \cdot (r_0 - r)}} dr$.

◊ remarque : dans le premier terme, on fait apparaître la dérivée du polynôme du radical.

• On obtient ainsi : $-\frac{1}{2} \frac{-2r + r_0}{\sqrt{r \cdot (r_0 - r)}} dr = -d(\sqrt{r \cdot (r_0 - r)})$.

• En passant par $x = \frac{-2r + r_0}{r_0}$ on obtient : $\frac{1}{\sqrt{r \cdot (r_0 - r)}} dr = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d\left(\arcsin\left(1 - \frac{2r}{r_0}\right)\right)$.

◊ remarque : dans ce terme on choisit la dérivée du polynôme du radical, divisée par la racine carrée de son discriminant (astuce "classique", mais on peut retrouver par tâtonnement).

• Pour $r - 1 > 0$ on peut par ailleurs passer par $x = \frac{1}{r-1}$ donnant :

$$\frac{1}{(r-1) \sqrt{r \cdot (r_0 - r)}} dr = -\frac{dx}{\sqrt{(r_0-1) x^2 + (r_0-2) x - 1}}.$$

• En reprenant la méthode du terme précédent, on passe par $y = \frac{2(r_0-1)x + (r_0-2)}{r_0}$ donnant :

$$\frac{1}{(r-1) \sqrt{r \cdot (r_0 - r)}} dr = -\frac{1}{\sqrt{r_0-1}} \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{r_0-1}} d\left(\operatorname{arcosh}\left(\frac{r_0 r - 2r + r_0}{r_0(r-1)}\right)\right).$$

• Cette expression suppose $\frac{r_0 r - 2r + r_0}{r_0(r-1)} \geq 1$, d'où en simplifiant $r \leq r_0$, ce qui est toujours vrai. Par contre pour $r < 1$ le changement de signe impliquerait $r > r_0$, ce qui est impossible.

• Pour $r - 1 < 0$ on peut alors de même utiliser $x = \frac{1}{1-r}$ donnant :

$$\frac{1}{(r-1) \sqrt{r \cdot (r_0 - r)}} dr = -\frac{dx}{\sqrt{(r_0-1) x^2 - (r_0-2) x - 1}}.$$

• Avec la même méthode, on passe par $y = \frac{2(r_0-1)x - (r_0-2)}{r_0}$ donnant :

$$\frac{1}{(r-1) \sqrt{r \cdot (r_0 - r)}} dr = -\frac{1}{\sqrt{r_0-1}} \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{r_0-1}} d\left(\operatorname{arcosh}\left(\frac{r_0 r - 2r + r_0}{r_0(1-r)}\right)\right).$$

• Cette expression suppose $\frac{r_0 r - 2r + r_0}{r_0(1-r)} \geq 1$, d'où en simplifiant $1 \leq r_0$, ce qui est toujours vrai.

• Au total : $c t = \sqrt{r_0 - 1} \sqrt{r \cdot (r_0 - r)} + \left(1 + \frac{r_0}{2}\right) \sqrt{r_0 - 1} \arcsin\left(1 - \frac{2r}{r_0}\right) + \operatorname{arcosh}\left(\frac{r_0 r - 2r + r_0}{r_0 \cdot |r-1|}\right) + Cste$.

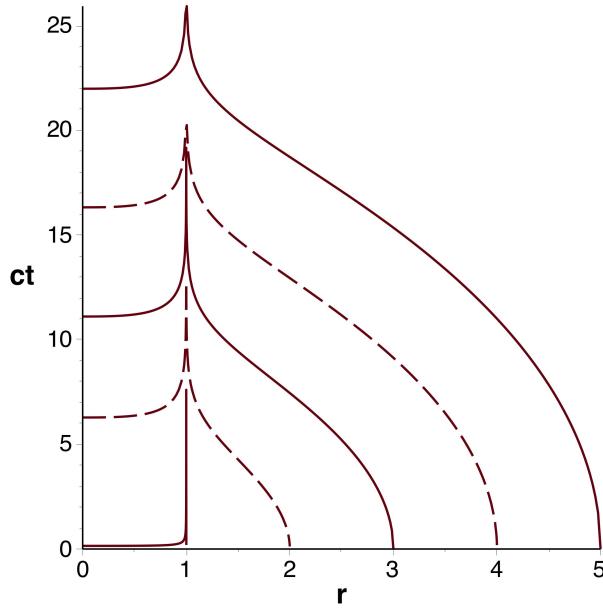
• On veut que $c t = 0$ corresponde au passage par $r = r_0$:

$$0 = \left(1 + \frac{r_0}{2}\right) \sqrt{r_0 - 1} \arcsin(-1) + Cste ; Cste = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{r_0}{2}\right) \sqrt{r_0 - 1}.$$

◊ remarque : on peut éventuellement substituer : $\arcsin\left(1 - \frac{2r}{r_0}\right) + \frac{\pi}{2} = \arccos\left(\frac{2r}{r_0} - 1\right)$.

◊ remarque : étant donné que l'expression diverge pour $r = 1$, il est impossible de raccorder par continuité à ce niveau, donc la constante d'intégration pour $r < 1$ pourrait être différente de celle imposée en $r = r_0 > 1$; le problème est analogue au prolongement de $\ln(|z|)$ comme primitive de $\frac{1}{z}$ pour $z < 0$ (le passage par les complexes donne d'ailleurs $\ln(|z|) + \ln(-1) = \ln(|z|) + i\pi$).

- 1.b. • On obtient les variations suivantes (avec asymptotes pour $r = 1$).



- 1.c. • Les variations de $ct(r, r_0)$ pour chaque r_0 fixé montrent qu'en chaque point (r, ct) passe une et une seule courbe de cette famille : celle commençant à la valeur $r_0(r, ct)$. Cette connaissance n'est que "formelle" dans la mesure où la relation mathématique établie précédemment n'est pas inversible (il faut par exemple procéder par des méthodes numériques).
- 2.a. • L'allure des trajectoires montantes s'obtient en changeant le signe de ct : symétriques verticales des précédentes.
- 2.b. • En raccordant les deux parties, on peut considérer une particule montant puis redescendant. Une seconde particule, effectuant le même mouvement plus tard aura une trajectoire de même forme mais décalée vers le haut.
 • Compte tenu de la forme des asymptotes pour $r = 1$, on constate que si une particule montante croise une particule descendante dans la zone $r < 1$, elle a alors forcément un second croisement dans la zone $r > 1$ (la réciproque n'est pas contre pas vraie).
 ♦ remarque : cet effet est également observé pour les représentations de Lemaître.

II. Généralisation des repérages de Lemaître

- 1.a. • On considère : $c dT = \sqrt{A_0} c dt + \sqrt{A_0 - A} \frac{dr}{A}$ où $A = A(r)$ et $A_0 = A(r_0(r, t))$.
 • Pour montrer que $c dT$ est une différentielle totale, on peut calculer les dérivées croisées (qui dans ce cas doivent être égales) :
- $$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sqrt{A_0 - A}}{A} \right) = \frac{1}{2A\sqrt{A_0 - A}} \frac{\partial A_0}{\partial t} = \frac{1}{2A\sqrt{A_0 - A}} \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial r_0}{\partial t} ;$$
- $$\frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{A_0} \right) = \frac{1}{2\sqrt{A_0}} \frac{\partial A_0}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{A_0}} \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial r_0}{\partial r} .$$
- Afin de comparer ces expressions, on peut chercher à exprimer $\frac{\partial r_0}{\partial t}$ et $\frac{\partial r_0}{\partial r}$, mais on peut aussi utiliser la relation utilisée pour calculer $ct(r, r_0)$. On est parti de : $c dt = -\sqrt{\frac{A_0}{A_0 - A}} \frac{dr}{A}$ pour r_0 fixé, c'est-à-dire qu'on peut considérer : $c dt(r, r_0) = \frac{c \partial t(r, r_0)}{\partial r} dr + \frac{c \partial t(r, r_0)}{\partial r_0} dr_0$ avec $\frac{c \partial t(r, r_0)}{\partial r} = -\frac{1}{A} \sqrt{\frac{A_0}{A_0 - A}}$.
- La réécriture : $dr_0(r, t) = \frac{\partial r_0}{\partial r} dr + \frac{\partial r_0}{\partial t} c dt$ donne alors :
- $$\frac{\partial r_0}{\partial r} = -\left(\frac{c \partial t}{\partial r_0}\right)^{-1} \frac{c \partial t}{\partial r} ; \quad \frac{\partial r_0}{\partial t} = \left(\frac{c \partial t}{\partial r_0}\right)^{-1} .$$

- Ainsi les dérivées croisées sont égales :

$$\frac{\partial}{c \partial t} \left(\frac{\sqrt{A_0 - A}}{A} \right) = \frac{1}{2A\sqrt{A_0 - A}} \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{c \partial t}{\partial r_0} \right)^{-1} ;$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{A_0} \right) = \frac{1}{2\sqrt{A_0}} \frac{1}{r_0^2} \frac{1}{A} \sqrt{\frac{A_0}{A_0 - A}} \left(\frac{c \partial t}{\partial r_0} \right)^{-1} = \frac{1}{2A\sqrt{A_0 - A}} \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{c \partial t}{\partial r_0} \right)^{-1} .$$

- 1.b. • Pour déterminer $\frac{\partial r_0}{c \partial t}$ on peut étudier $\frac{c \partial t}{\partial r_0}$ quand r_0 varie. Il est alors utile de préciser les notations pour bien indiquer que lors de l'intégration $r_0(r, t)$ ne varie pas car il est fonction de r et non de la variable d'intégration muette r' : $c t(r, r_0) = \sqrt{r_0 - 1} \int_r^{r_0} \frac{r'}{r' - 1} \frac{\sqrt{r'}}{\sqrt{r_0 - r'}} dr'$.

- Ainsi (on dérive l'intégrale par rapport à la borne et par rapport à son argument) :

$$\frac{c \partial t}{\partial r_0} = \frac{1}{2\sqrt{r_0 - 1}} \int_r^{r_0} \frac{r'}{r' - 1} \frac{\sqrt{r'}}{\sqrt{r_0 - r'}} dr' + \sqrt{r_0 - 1} \frac{r}{r - 1} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_0 - r}} + \sqrt{r_0 - 1} \int_r^{r_0} \frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{r'}{r' - 1} \frac{\sqrt{r'}}{\sqrt{r_0 - r'}} \right) dr' ;$$

$$\frac{c \partial t}{\partial r_0} = \frac{c t}{2(r_0 - 1)} + \sqrt{r_0 - 1} \frac{r}{r - 1} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_0 - r}} - \frac{1}{2} \sqrt{r_0 - 1} \int_r^{r_0} \frac{r'}{r' - 1} \frac{\sqrt{r'}}{(r_0 - r')^{3/2}} dr' .$$

◊ remarque : l'intégrale du premier terme correspond à $c t(r, r_0)$; la question suivante montre qu'il est inutile de préciser en calculant l'intégrale du troisième terme.

- 1.c. • Il est clair que l'expression obtenue est compliquée ; or, c'est de son inverse dont on a besoin pour ensuite intégrer $c dT$. Bien que formellement possible à décrire, une telle intégrale serait en pratique impossible littéralement.

◊ remarque : il est important d'avoir vérifié que $c dT$ est une différentielle totale, sinon on aurait pu, en cherchant un facteur intégrant, espérer en trouver un qui de plus par chance simplifie le calcul.

- 2.a. • On considère maintenant : $d\underline{R} = \sqrt{A_0} \frac{dr}{A} + \sqrt{A_0 - A} c dt$, où $A = A(r)$ et $A_0 = A(r_0(r, t))$.

- Pour trouver un facteur intégrant $F(r, t)$ tel que $dR = F d\underline{R}$ soit une différentielle totale, il faut que les dérivées croisées soient égales :

$$\frac{\partial}{c \partial t} \left(F \frac{\sqrt{A_0}}{A} \right) = \frac{1}{A} \left[\frac{\partial F}{c \partial t} \sqrt{A_0} + \frac{F}{2\sqrt{A_0}} \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial r_0}{c \partial t} \right] ;$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(F \sqrt{A_0 - A} \right) = \frac{\partial F}{\partial r} \sqrt{A_0 - A} + \frac{F}{2\sqrt{A_0 - A}} \left(\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial r_0}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) .$$

- 2.b. • Compte tenu de ce qui a été vu précédemment, les expressions obtenues sont très compliquées. Bien que formellement possible à décrire, une telle intégrale de dR semble en pratique impossible littéralement : même si on trouvait un facteur intégrant, il est peu probable qu'il simplifie l'intégration.

III. Gaz de particules de faible densité

- 1.a. ◊ remarque : on note \square^1 pour les dérivées par rapport à $x^1 = R$ et \square^0 pour les dérivées par rapport à $x^0 = c T$.

- Pour une métrique de la forme : $ds^2 = e^{2\alpha} c^2 dT^2 - e^{2\gamma} dR^2 - e^{2\delta} d\Omega^2$ on obtient :

$$g_{00} = e^{2\alpha} ; g_{11} = -e^{2\gamma} ; g_{22} = -e^{2\delta} ; g_{33} = -e^{2\delta} \sin^2(\theta) ;$$

$$g^{00} = e^{-2\alpha} ; g^{11} = -e^{-2\gamma} ; g^{22} = -e^{-2\delta} ; g^{33} = -\frac{e^{-2\delta}}{\sin^2(\theta)} ;$$

$$\Gamma_{000} = \dot{\alpha} e^{2\alpha} ; \Gamma_{011} = -\Gamma_{101} = \dot{\gamma} e^{2\gamma} ; \Gamma_{022} = -\Gamma_{202} = \dot{\delta} e^{2\delta} ; \Gamma_{033} = -\Gamma_{303} = \dot{\delta} e^{2\delta} \sin^2(\theta) ;$$

$$\Gamma_{001} = -\Gamma_{100} = \alpha' e^{2\alpha} ; \Gamma_{111} = -\gamma' e^{2\gamma} ; \Gamma_{221} = -\Gamma_{122} = -\delta' e^{2\delta} ;$$

$$\Gamma_{331} = -\Gamma_{133} = -\delta' e^{2\delta} \sin^2(\theta) ; \Gamma_{332} = -\Gamma_{233} = -e^{2\delta} \sin(\theta) \cos(\theta) ;$$

$$\Gamma_{000}^0 = \dot{\alpha} ; \Gamma_{111}^0 = e^{-2\alpha} \dot{\gamma} e^{2\gamma} ; \Gamma_{011}^1 = \dot{\gamma} ;$$

$$\Gamma_{222}^0 = e^{-2\alpha} \dot{\delta} e^{2\delta} ; \Gamma_{333}^0 = e^{-2\alpha} \dot{\delta} e^{2\delta} \sin^2(\theta) ; \Gamma_{022}^2 = \Gamma_{033}^3 = \dot{\delta} ;$$

$$\Gamma_{001}^0 = \alpha' ; \Gamma_{000}^1 = e^{-2\gamma} \alpha' e^{2\alpha} ; \Gamma_{111}^1 = \gamma' ;$$

$$\Gamma_{221}^2 = \Gamma_{311}^3 = \delta' ; \Gamma_{222}^1 = -e^{-2\gamma} \delta' e^{2\delta} ; \Gamma_{333}^1 = -e^{-2\gamma} \delta' e^{2\delta} \sin^2(\theta) ;$$

$$\Gamma_{332}^3 = \cot(\theta) ; \Gamma_{233}^2 = -\sin(\theta) \cos(\theta) .$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{00} &= -\ddot{\gamma} - 2\ddot{\delta} + \dot{\gamma} \cdot (\dot{\alpha} - \dot{\gamma}) + 2\dot{\delta} \cdot (\dot{\alpha} - \dot{\delta}) + e^{2\alpha} e^{-2\gamma} [\alpha'' + \alpha' \cdot (\alpha' - \gamma' + 2\delta')] ; \\ \mathbf{R}_{01} &= -2\dot{\delta}' + 2\alpha' \dot{\delta} + 2\dot{\gamma} \delta' - 2\dot{\delta} \delta' ; \\ \mathbf{R}_{11} &= -\alpha'' - 2\delta'' + \alpha' \cdot (\gamma' - \alpha') + 2\delta' \cdot (\gamma' - \delta') + e^{2\gamma} e^{-2\alpha} [\dot{\gamma} + \dot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma} - \dot{\alpha} + 2\dot{\delta})] ; \\ \mathbf{R}_{22} &= e^{2\delta} e^{-2\alpha} [\ddot{\delta} + \dot{\delta} \cdot (\dot{\gamma} - \dot{\alpha} + 2\dot{\delta})] - e^{2\delta} e^{-2\gamma} [\delta'' + \delta' \cdot (\alpha' - \gamma' + 2\delta')] + 1 ; \\ \mathbf{R}_{33} &= \mathbf{R}_{22} \sin^2(\theta) .\end{aligned}$$

- Ceci correspond à :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_0^0 &= e^{-2\alpha} [-\ddot{\gamma} - 2\ddot{\delta} + \dot{\gamma} \cdot (\dot{\alpha} - \dot{\gamma}) + 2\dot{\delta} \cdot (\dot{\alpha} - \dot{\delta})] + e^{-2\gamma} [\alpha'' + \alpha' \cdot (\alpha' - \gamma' + 2\delta')] ; \\ \mathbf{R}_0^1 &= 2e^{-2\gamma} [\dot{\delta}' - \alpha' \dot{\delta} - \dot{\gamma} \delta' + \dot{\delta} \delta'] ; \\ \mathbf{R}_1^1 &= -e^{-2\alpha} [\dot{\gamma} + \dot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma} - \dot{\alpha} + 2\dot{\delta})] - e^{-2\gamma} [-\alpha'' - 2\delta'' + \alpha' \cdot (\gamma' - \alpha') + 2\delta' \cdot (\gamma' - \delta')] ; \\ \mathbf{R}_2^2 &= \mathbf{R}_3^3 = -e^{-2\alpha} [\ddot{\delta} + \dot{\delta} \cdot (\dot{\gamma} - \dot{\alpha} + 2\dot{\delta})] + e^{-2\gamma} [\delta'' + \delta' \cdot (\alpha' - \gamma' + 2\delta')] - e^{-2\delta} .\end{aligned}$$

- 1.b. • Pour un repérage comobile, la variable temporelle correspond au temps propre des particules (immobiles) : $\alpha = 0$.

- Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_0^0 &= [-\ddot{\gamma} - 2\ddot{\delta} - \dot{\gamma}^2 - 2\dot{\delta}^2] ; \\ \mathbf{R}_0^1 &= 2e^{-2\gamma} [\dot{\delta}' - \dot{\gamma} \delta' + \dot{\delta} \delta'] ; \\ \mathbf{R}_1^1 &= -[\dot{\gamma} + \dot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma} + 2\dot{\delta})] - e^{-2\gamma} [-2\delta'' + 2\delta' \cdot (\gamma' - \delta')] ; \\ \mathbf{R}_2^2 &= \mathbf{R}_3^3 = -[\ddot{\delta} + \dot{\delta} \cdot (\dot{\gamma} + 2\dot{\delta})] + e^{-2\gamma} [\delta'' - \delta' \cdot (\gamma' - 2\delta')] - e^{-2\delta} .\end{aligned}$$

- 1.c. • Pour le tenseur énergie-impulsion : $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$; $u^0 = e^{-\alpha} = 1$ (dans le cas comobile) et $u^k = 0$;

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{00} &= \varepsilon e^{-2\alpha} = \varepsilon ; \quad \mathbf{T}^{11} = p e^{-2\gamma} ; \quad \mathbf{T}^{22} = p e^{-2\delta} ; \quad \mathbf{T}^{33} = p \frac{e^{-2\delta}}{\sin^2(\theta)} ; \\ \mathbf{T}_0^0 &= \varepsilon ; \quad \mathbf{T}_1^1 = \mathbf{T}_2^2 = \mathbf{T}_3^3 = -p .\end{aligned}$$

- La trace du tenseur de Ricci est :

$$\mathbf{R} = -2[\dot{\gamma} + 2\dot{\delta} + \dot{\gamma}^2 + 2\dot{\gamma}\dot{\delta} + 3\dot{\delta}^2] + 2e^{-2\gamma}[2\delta'' - 2\gamma'\delta' + 3\delta'^2] - 2e^{-2\delta} .$$

- Les équations du champ peuvent donc s'écrire, avec $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_0^0 - \frac{1}{2}\mathbf{R} &= [2\dot{\gamma}\dot{\delta} + \dot{\delta}^2] - e^{-2\gamma}[2\delta'' - 2\gamma'\delta' + 3\delta'^2] + e^{-2\delta} = \chi\varepsilon ; \\ \mathbf{R}_0^1 &= 2e^{-2\gamma}[\dot{\delta}' - \dot{\gamma}\delta' + \dot{\delta}\delta'] = 0 ; \\ \mathbf{R}_1^1 - \frac{1}{2}\mathbf{R} &= [2\ddot{\delta} + 3\dot{\delta}^2] - \delta'^2 e^{-2\gamma} + e^{-2\delta} = -\chi p ; \\ \mathbf{R}_2^2 - \frac{1}{2}\mathbf{R} &= [\ddot{\gamma} + \ddot{\delta} + \dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}\dot{\delta} + \dot{\delta}^2] - e^{-2\gamma}[\delta'' - \gamma'\delta' + \delta'^2] = -\chi p .\end{aligned}$$

- 2.a. • On obtient dans ces conditions :

$$\delta' = \frac{r'}{r} ; \quad \delta'' = \frac{r''}{r} - \frac{r'^2}{r^2} ; \quad \dot{\delta} = \frac{\dot{r}}{r} ; \quad \ddot{\delta} = \frac{\ddot{r}}{r} - \frac{\dot{r}^2}{r^2} ; \quad \dot{\delta}' = \frac{\dot{r}'}{r} - \frac{r'\dot{r}}{r^2} ;$$

$$\frac{1}{r^2}[2\dot{\gamma}r\dot{r} + \dot{r}^2 + 1] - e^{-2\gamma}\frac{1}{r^2}[2rr'' - 2\gamma'r'r' + r'^2] = \chi\varepsilon ;$$

$$\dot{r}' - \dot{\gamma}r' = 0 ;$$

$$2r\ddot{r} + \dot{r}^2 + 1 - r'^2 e^{-2\gamma} = 0 ;$$

$$\frac{1}{r}[\ddot{\gamma}r + \dot{\gamma}^2r + \dot{\gamma}\dot{r} + \ddot{r}] + e^{-2\gamma}\frac{1}{r}[\gamma'r' - r''] = 0 .$$

- 2.b. • La seconde équation peut être intégrée par rapport à cT ; le coefficient “constant” (par rapport à T) intervenant dans la primitive peut être noté opportunément $1 + f(R)$ dans le but de simplifier ensuite les autres équations. Ainsi : $e^{2\gamma} = \frac{r'^2}{1+f(R)}$.

- 2.c. • En reportant dans la troisième équation, on obtient : $2r\ddot{r} + \dot{r}^2 - f(R) = 0$.

- En multipliant par \dot{r} , l'intégration par rapport à cT donne : $r\dot{r}^2 - r f(R) = F(R)$.

◊ remarque : pour $p = 0$ l'équation découlant de \mathbf{R}_2^2 n'est pas indépendante ; elle apporterait une information supplémentaire pour calculer la pression si celle-ci n'était pas nulle.

- 3.a. • On substitue : $e^{-2\gamma} = \frac{1+\mathbf{f}}{r^2}$; $\dot{\gamma} = \frac{\dot{r}'}{r}$; $\gamma' = \frac{r''}{r} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{f}'}{1+\mathbf{f}}$ dans $r^2 \chi \varepsilon$.
 • Ainsi après simplification : $r' r^2 \chi \varepsilon = r' \dot{r}^2 + 2r \dot{r} \dot{r}' - r' \mathbf{f} - r \mathbf{f}' = (r \dot{r}^2)' - (r \mathbf{f})' = [r \cdot (\dot{r}^2 - \mathbf{f})]'$.
 • En substituant : $r \cdot (\dot{r}^2 - \mathbf{f}) = F$, on obtient simplement : $r' r^2 \chi \varepsilon = F'$.

- 3.b. • On obtient $F = \text{Cste}$; or F a une unité de longueur donc on peut proposer $F = r_s$.
 • Par contre, pour $\mathbf{f} \neq 0$ on pourrait aussi proposer $F = r_s \cdot [1 + \mathbf{f}(r_s)]$, ou d'autres expressions...

IV. Gaz de pression négligeable

1. • Pour R fixé, l'équation considérée donne : $c T = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\mathbf{f} + \frac{F}{r}}}$.
- Pour $\mathbf{f} > 0$ avec $x = \frac{\mathbf{f}}{F} r$ on peut écrire (pour R fixé) :
- $$c T = \pm \frac{F}{\mathbf{f}^{3/2}} \int \frac{x dx}{\sqrt{x \cdot (x+1)}} = \pm \frac{F}{\mathbf{f}^{3/2}} \int \frac{2x+1}{2\sqrt{x \cdot (x+1)}} dx \mp \frac{F}{2\mathbf{f}^{3/2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x \cdot (x+1)}} ;$$
- $$c T = \pm \frac{F}{\mathbf{f}^{3/2}} \sqrt{x \cdot (x+1)} \mp \frac{F}{2\mathbf{f}^{3/2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x \cdot (x+1)}} .$$
- Avec $y = 2x+1$ on obtient : $\int \frac{dx}{\sqrt{x \cdot (x+1)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \text{arsinh}(2\sqrt{x \cdot (x+1)}) + \text{Cste}$.
 • Ainsi : $c T(r, R) = c T_0(R) \pm \frac{F}{\mathbf{f}^{3/2}} \sqrt{x \cdot (x+1)} \mp \frac{F}{2\mathbf{f}^{3/2}} \text{arsinh}(2\sqrt{x \cdot (x+1)})$.
 • L'expression n'étant pas simple, on peut préférer noter : $\eta = \text{arsinh}(2\sqrt{x \cdot (x+1)})$; cela donne :
 $y = \cosh(\eta)$; $x = \frac{1}{2}[\cosh(\eta) - 1]$; $r = \frac{F}{2\mathbf{f}}[\cosh(\eta) - 1]$; $c T(r, R) = c T_0(R) \pm \frac{F}{2\mathbf{f}^{3/2}} [\sinh(\eta) - \eta]$.
 • On constate alors que $r = 0$ correspond à $\eta = 0$ et $T = T_0$; c'est la date à laquelle le gaz atteint la singularité centrale. Si $r > 0$ avant, cela impose : $c T(r, R) = c T_0 - \frac{F}{2\mathbf{f}^{3/2}} [\sinh(\eta) - \eta]$.
 ♦ remarque : dans le "passé", $T = T_0 < 0$ est aussi la date à laquelle le gaz quitte la singularité centrale ; si on considère que $r > 0$ après, cela impose : $c T(r, R) = c T_0 + \frac{F}{2\mathbf{f}^{3/2}} [\sinh(\eta) - \eta]$.

2. • Pour $\mathbf{f} < 0$ (mais $\mathbf{f} > -1$), avec $x = \frac{|\mathbf{f}|}{F} r$ on peut écrire (pour R fixé) :
- $$c T = \pm \frac{F}{|\mathbf{f}|^{3/2}} \int \frac{x dx}{\sqrt{x \cdot (1-x)}} = \mp \frac{F}{|\mathbf{f}|^{3/2}} \int \frac{1-2x}{2\sqrt{x \cdot (1-x)}} dx \pm \frac{F}{2|\mathbf{f}|^{3/2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x \cdot (1-x)}} ;$$
- $$c T = \mp \frac{F}{|\mathbf{f}|^{3/2}} \sqrt{x \cdot (1-x)} \pm \frac{F}{2|\mathbf{f}|^{3/2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x \cdot (1-x)}} .$$
- Avec $y = 1-2x$ on obtient : $\int \frac{dx}{\sqrt{x \cdot (1-x)}} = - \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \text{arcsin}(2\sqrt{x \cdot (1-x)}) + \text{Cste}$.
 • Ainsi : $c T(r, R) = c T_0(R) \mp \frac{F}{|\mathbf{f}|^{3/2}} \sqrt{x \cdot (1-x)} \pm \frac{F}{2|\mathbf{f}|^{3/2}} \text{arcsin}(2\sqrt{x \cdot (1-x)})$.
 • L'expression n'étant pas simple, on peut préférer noter : $\eta = \text{arcsin}(2\sqrt{x \cdot (1-x)})$; cela donne :
 $y = \cos(\eta)$; $x = \frac{1}{2}[1 - \cos(\eta)]$; $r = \frac{F}{2|\mathbf{f}|}[1 - \cos(\eta)]$; $c T(r, R) = c T_0(R) \pm \frac{F}{2|\mathbf{f}|^{3/2}} [\eta - \sin(\eta)]$.
 ♦ remarque : ces notations peuvent être suggérées par l'étude pour $\mathbf{f} > 0$, si on remarque que la quantité $\sqrt{x \cdot (1-x)}$ n'est définie que pour $x \in [0; 1]$ et prend la valeur maximum $\frac{1}{2}$ pour $x = \frac{1}{2}$.
 • On constate alors que $r = 0$ correspond à $\eta = 0$ et $T = T_0$; c'est la date à laquelle le gaz atteint la singularité centrale. Si $r > 0$ avant, cela impose : $c T(r, R) = c T_0(R) - \frac{F}{2|\mathbf{f}|^{3/2}} [\eta - \sin(\eta)]$.
 ♦ remarque : dans le "passé", $T = T_0 < 0$ est aussi la date à laquelle le gaz quitte la singularité centrale ; si on considère que $r > 0$ après, cela impose : $c T(r, R) = c T_0(R) + \frac{F}{2|\mathbf{f}|^{3/2}} [\eta - \sin(\eta)]$.

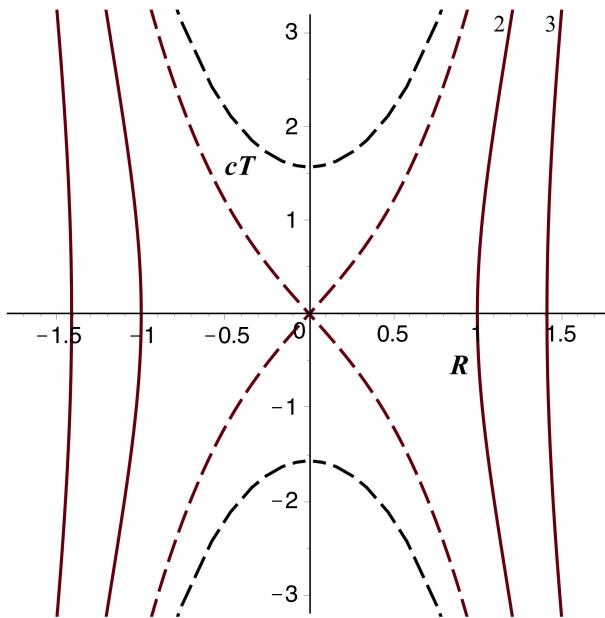
V. Métrique à la Novikov et métrique de Lemaître

- Le repérage de Lemaître est construit en prenant comme références des particules passant toutes par un même extremum r_0 , mais à des instants différents ; l'origine au passage par $r = 0$ à $t = 0$.
 • La vitesse d'entraînement de ce repérage par rapport à la métrique statique ne dépend que de r ; les particules faisant le même mouvement à d'autres instants sont aussi comobiles (avec T différent).

- Le repérage à la Novikov est en général construit en prenant comme références des particules passant toutes par un extremum à $t = 0$ (ce repérage est à cet instant immobile par rapport à la métrique statique). Ces particules ont alors un extremum différent : celui qu'il faut pour être où elles sont en étant parties à $t = 0$. Cela est décrit par $f(R)$.
- La vitesse d'entraînement de ce repérage dépend de r , puisque les particules partant immobiles de différents lieux à $t = 0$ y ont subi des accélérations différentes, mais il dépend aussi de t . Les particules faisant le même mouvement à d'autres instants ne sont pas comobiles.
- Si on impose $f = \text{Cste}$, cela signifie que toutes les particules de référence ont le même extremum ; on décale de $T_0(R)$ sinon elles seraient identiques.
- On obtient (en notations réduites) : $r = \frac{1}{2(1-\alpha)} [1 - \cos(\eta)]$; $cT = cT_0(R) - \frac{1}{2(1-\alpha)^{3/2}} [\eta - \sin(\eta)]$ avec $cT_0(R) = R$. La seconde équation donne : $[1 - \cos(\eta)] \eta' = 2(1-\alpha)^{3/2}$ donc $\eta' = \frac{\sqrt{1-\alpha}}{r}$.
- Ainsi $r' = \frac{1}{2(1-\alpha)} \sin(\eta)$ η' avec $\sin(\eta) = \sqrt{1 - \cos^2(\eta)}$ et $\cos(\eta) = 1 - 2r(1-\alpha)$; en simplifiant après substitution on obtient : $r'^2 = \alpha - 1 + \frac{1}{r}$. Ceci aboutit à $-g_{11} = \frac{r'^2}{1+f} = \frac{r'^2}{\alpha}$ correspondant exactement à la métrique de Lemaître. De façon générale, les repérages de Lemaître font donc partie de ceux déduits de la démarche de Novikov.

VI. Métrique de Novikov

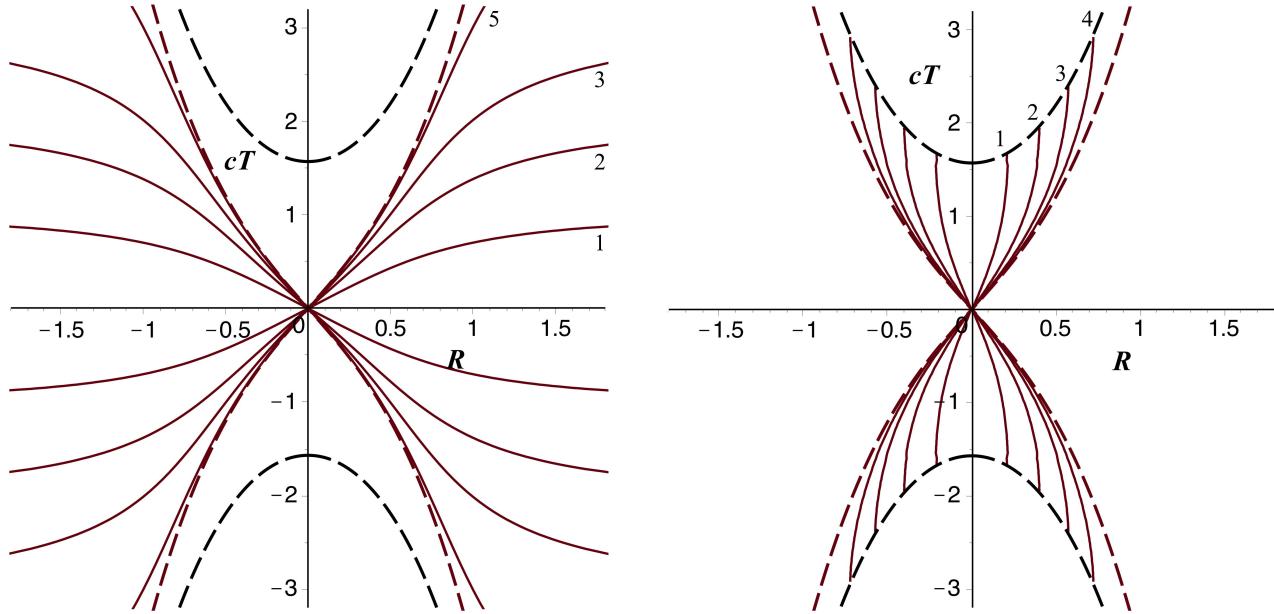
- L'expression proposée correspond à $f < 0$. On obtient (en notations réduites) :
$$r = \frac{1+R^2}{2} [1 - \cos(\eta)] ; cT = \sqrt{2} r^{3/2} [\pi - \eta + \sin(\eta)]$$
.
- En inversant la première relation (la seconde convient), on obtient une représentation paramétrique (selon η) des courbes correspondant à $r = \text{Cste}$: $R = \pm \sqrt{\frac{2r}{1-\cos(\eta)} - 1}$.
- La représentation est la suivante (ici pour $r = 0; 1; 2; 3$) ; elle est analogue au diagramme de Kruskal-Szekeres.



◊ remarque : dans les relations dont on est parti, la valeur $r = 0$ impose $\eta = 0$ (valeur fixée du paramètre), donc R et cT indéterminés ; on peut tout de même tracer la courbe en considérant la limite pour $r \rightarrow 0$ (en pratique $r \approx 0,01$) ou en repartant des expressions de base donnant alors : $cT = \frac{\pi}{2} (1 + R^2)^{3/2}$.

VII. Métrique de Novikov

- Dans la métrique, l'expression du terme $r^2 d\Omega^2$ nécessite qu'on connaisse déjà $r(R, T)$, mais on n'a au contraire aucune façon simple d'exprimer $t(R, T)$ littéralement. On peut par contre procéder numériquement.
 - Pour les régions $r > r_s$ on peut utiliser le fait que l'axe $T = 0$ correspond à $t = 0$ (choix arbitraire "logique" de l'origine du temps).
 - La métrique proposée correspond à $f < 0$. On obtient (en notations réduites) :
$$r = \frac{1+R^2}{2} [1 - \cos(\eta)] ; \quad cT = \frac{(1+R^2)^{3/2}}{2} [\pi - \eta + \sin(\eta)].$$
 - Pour une valeur constante de R la métrique donne : $A c^2 dt^2 - \frac{1}{A} dr^2 = c^2 dT^2$.
 - L'axe $T = 0$ correspond à $\eta = \pi$. Pour R fixé, on peut augmenter progressivement T (diminuer η) jusqu'à atteindre une valeur choisie de t :
 - on calcule r sur l'axe ;
 - on diminue η ; on recalcule r et on en déduit δr ;
 - on recalcule T et on en déduit δT ;
 - on calcule A et on en déduit δt ;
 - on incrémente t de δt ; ceci donne $t(R, T)$;
 - tant que la valeur t souhaitée n'est pas atteinte, on décrémente η et on recommence ;
 - quand la valeur t souhaitée est atteinte, on connaît un point (R, T) sur la courbe ;
 - on recommence pour une autre valeur de R ; ceci donne la courbe point par point.



- Pour les régions $r < r_s$ cette méthode ne fonctionne pas puisqu'il est impossible de dépasser la limite $r = r_s$ pour laquelle t diverge. On peut alors utiliser le fait que l'axe $R = 0$ correspond aussi à $t = 0$ (par symétrie) et raisonner avec $T = \text{Cste}$.
 - Cette méthode ne peut toutefois pas dépasser $T = T_0(R = 0) = \frac{\pi}{2}$ (on ne peut pas partir d'un point sur l'axe avec $r < 0$). Pour prolonger les courbes au delà, on peut calculer $t(R, T)$ le long de la courbe $r = 0$: $cT = \frac{\pi}{2}(1 + R^2)^{3/2}$.
 - Pour $r = \text{Cste}$ (a priori non nulle) la métrique donne : $A c^2 dt^2 = c^2 dT^2 - \frac{1+R^2}{R^2} r'^2(R, T) dR^2$.
 - Mais par ailleurs : $dr = \dot{r} dT + r' dR = 0$, donc : $A c^2 dt^2 = c^2 dT^2 - \frac{1+R^2}{R^2} \dot{r}^2(R, T) dT^2$.
 - Avec (en notations réduites) : $A = \frac{r-1}{r}$; $r'^2 = f + \frac{F}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{1+R^2}$ on obtient ensuite :
$$dt^2 = dT^2 \frac{r}{r-1} \left[1 - \frac{1+R^2}{R^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{1+R^2} \right) \right] = \frac{1+R^2}{R^2} dT^2.$$
 - À la limite $r = 0$, en posant $y = \frac{2}{n} cT$, ceci donne : $c dt = \frac{\pi}{2} \frac{y^{1/3}}{\sqrt{y^{2/3}-1}} dy$.

- En notant $z = y^{2/3}$ on obtient :

$$c dt = \frac{3\pi}{4} \frac{z}{\sqrt{z-1}} dz = \frac{3\pi}{4} \left[\sqrt{z-1} + \frac{1}{\sqrt{z-1}} \right] dz ;$$

$$c t = \frac{\pi}{2} (z+2) \sqrt{z-1} \text{ (compte tenu de } t=0 \text{ pour } z=1) ;$$

$$c t = \left((c T)^{2/3} + 2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2/3} \right) \sqrt{(c T)^{2/3} - \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2/3}} .$$

- 2.b. • Pour une valeur constante de T , la métrique donne :

$$A c^2 dt^2 - \frac{1}{A} dr^2 = -\frac{1+R^2}{R^2} r'^2 (R, T) dR^2 = -\frac{1+R^2}{R^2} dr^2 .$$

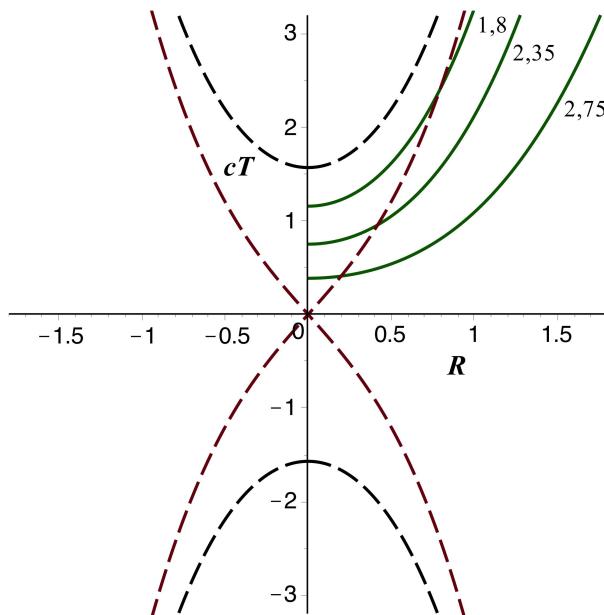
- Pour $c T \leq \frac{\pi}{2}$ fixé, on peut augmenter progressivement R (augmenter η) jusqu'à atteindre une valeur choisie de t :

- ◊ on calcule η sur l'axe ; on en déduit r ;
- ◊ on augmente R ; on recalcule η puis r et on en déduit δr ;
- ◊ on calcule A et on en déduit δt ;
- ◊ on incrémente t de δt ; ceci donne $t(R, T)$;
- ◊ tant que la valeur t souhaitée n'est pas atteinte, on incrémente R et on recommence ;
- ◊ quand la valeur t souhaitée est atteinte, on connaît un point (R, T) sur la courbe ;
- ◊ on recommence pour une autre valeur de T ; ceci donne la courbe point par point.

- Pour $c T > \frac{\pi}{2}$ fixé, on peut procéder de façon analogue en partant de $R_0 = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/3} \sqrt{(c T)^{2/3} - \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2/3}}$ avec la valeur $c t_0 = \frac{\pi}{2} R_0 \cdot (R_0^2 + 3)$ calculée précédemment.

VIII. Métrique de Novikov

- La moitié supérieure des trajectoires comobiles ($R = Cste$) est décrite :
 - ◊ depuis l'axe horizontal ($\eta = \pi$; $T = 0$; $r = 1 + R^2$) ;
 - ◊ jusqu'à la singularité ($\eta = 0$; $T = T_0$; $r = 0$) .
- Le paramètre η sert donc à décrire l'évolution de T sur ces trajectoires, mais cette évolution dépend de R (bien que restant qualitativement comparable), donc $\eta = \eta(R, T)$.
- Ceci justifie qu'on puisse raisonner sur la limite $R \rightarrow 0$ en considérant $\eta = Cste$. On peut le montrer graphiquement en traçant les courbes correspondantes.



◊ remarque : $\eta = 0$ correspond à $r = 0$; $\eta = \pi$ correspond à $T = 0$; la dépendance par rapport à η est très faible pour $\eta \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

IX. Métrique de Novikov

1.a. • On obtient :

$$c \, dT = \frac{3}{2} R \cdot (1 + R^2)^{1/2} [\pi - \eta + \sin(\eta)] \, dR - \frac{1}{2} (1 + R^2)^{3/2} [1 - \cos(\eta)] \, d\eta ;$$

$$d\eta = \frac{3 R}{1+R^2} \frac{[\pi-\eta+\sin(\eta)]}{[1-\cos(\eta)]} \, dR - \frac{2(1+R^2)^{-3/2}}{[1-\cos(\eta)]} c \, dT .$$

1.b. • On obtient :

$$dr = R \cdot [1 - \cos(\eta)] \, dR - \frac{1}{2} (1 + R^2) [\sin(\eta)] \, d\eta ;$$

$$\dot{r} = \frac{1}{\sqrt{1+R^2}} \frac{\sin(\eta)}{1-\cos(\eta)} ;$$

$$r' = R \cdot [1 - \cos(\eta)] - \frac{3 R}{2} \frac{\sin(\eta) [\pi-\eta+\sin(\eta)]}{[1-\cos(\eta)]} .$$

◊ remarque : on retrouve en particulier : $\dot{r}^2 = \frac{1+\cos(\eta)}{2r} = \mathcal{f} + \frac{1}{r}$.

◊ remarque : il faut ne pas confondre $r' = \frac{\partial}{\partial R} r(R, T)$ (pour T fixé) avec $\frac{\partial}{\partial R} r(R, \eta) = \frac{\partial}{\partial R} r(R, \eta_{(R, T)})$ dans lequel on substitue $\eta(R, T)$ après avoir dérivé pour η fixé.

2. • La moitié supérieure des trajectoires comobiles ($R = Cste$) est décrite :

◊ depuis l'axe horizontal ($\eta = \pi$; $T = 0$; $r = 1 + R^2$) ;

◊ jusqu'à la singularité ($\eta = 0$; $T = T_0$; $r = 0$).

• Le paramètre η sert donc à décrire l'évolution de T sur ces trajectoires, mais cette évolution dépend de R (bien que restant qualitativement comparable), donc $\eta = \eta(R, T)$. Ceci justifie qu'on puisse raisonner sur la limite $R \rightarrow 0$ en considérant $\eta = Cste$.

• Les courbes $r = Cste$ ont une tangente horizontale pour $R = 0$, donc $r' = 0$. Mais $1 + \mathcal{f} = \frac{R^2}{1+R^2}$ s'annule aussi, donc on souhaite préciser le comportement du quotient.

• L'expression $r' = R \cdot [1 - \cos(\eta)] - \frac{3 R}{2} \frac{\sin(\eta) [\pi-\eta+\sin(\eta)]}{[1-\cos(\eta)]}$ montre que pour tout η : $r' \approx R f_1(\eta)$.

• Au total $\frac{r'^2}{1+\mathcal{f}(R)} \approx (1 + R^2) f_1^2(\eta)$ donc la limite de la métrique pour $R = 0$ est définie pour tout η (on peut prolonger par continuité).

3.a. • Les courbes $r = Cste$ ont une tangente horizontale pour $R = 0$, donc $r' = 0$, mais en outre cela est vrai pour tout T , donc $\dot{r}' = 0$. Mais puisque $1 + \mathcal{f} = \frac{R^2}{1+R^2}$ s'annule aussi, on souhaite préciser le comportement du quotient.

• On peut écrire : $\dot{r}^2 = \frac{1}{1+R^2} \frac{1+\cos(\eta)}{1-\cos(\eta)}$. Ainsi : $2 \dot{r} \dot{r}' = -\frac{2R}{1+R^2} f_2(\eta) + \frac{1}{1+R^2} \frac{d}{d\eta} f_2(\eta) \eta'$ avec :

$$\eta' = \frac{3 R}{1+R^2} \frac{[\pi-\eta+\sin(\eta)]}{[1-\cos(\eta)]} = \frac{R}{1+R^2} f_3(\eta) ; \text{ donc globalement : } \dot{r}' = \frac{R}{\sqrt{1+R^2}} f_4(\eta) + \frac{R}{(1+R^2)^{3/2}} f_5(\eta) .$$

• Finalement pour $R \approx 0$: $\frac{r' \dot{r}'}{1+\mathcal{f}} \approx \frac{R^2}{R^2} f_6(\eta)$; la limite de l'équation sur T est définie pour tout η .

3.b. • On peut écrire : $r'' = f_1(\eta) + R \frac{d}{d\eta} f_1(\eta) \eta' = f_1(\eta) + \frac{R^2}{1+R^2} f_7(\eta)$ (limite généralement non nulle).

$$\text{Ainsi : } \frac{r''}{r'} \approx \frac{1}{R} + \frac{R}{1+R^2} f_8(\eta) .$$

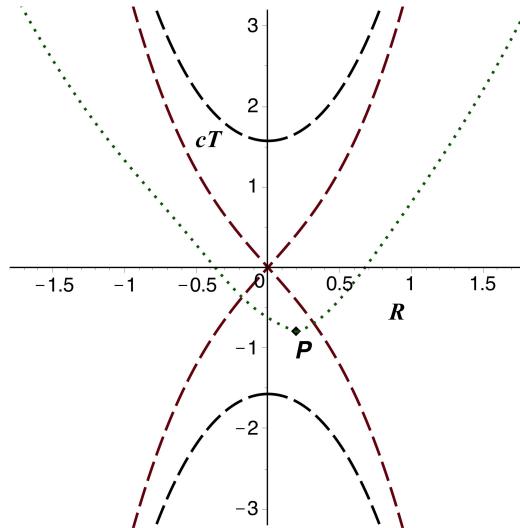
$$\bullet \text{ On obtient } \mathcal{f}' = \frac{2R}{(1+R^2)^2} \text{ donc } \frac{\mathcal{f}'}{1+\mathcal{f}} = \frac{2}{R(1+R^2)} .$$

• Finalement, pour $R \approx 0$: $\frac{r''}{r'} - \frac{\mathcal{f}'}{1+\mathcal{f}} \approx \frac{1}{R} - \frac{2}{R}$ diverge ; la limite de l'équation sur R n'est pas définie.

X. Métrique de Novikov

• Les trajectoires des photons correspondent à $ds^2 = 0$: $dR = \pm \frac{\sqrt{1+\mathcal{f}}}{r'} c \, dT$.

- Il n'y a pas d'expression littérale simple, mais on peut les tracer pas des méthodes numériques :
 - ◊ partant d'un point (R, cT) donné, on calcule $\eta(R, T)$;
 - ◊ on calcule $r' = R \cdot [1 - \cos(\eta)] - \frac{3R}{2} \frac{\sin(\eta) [\pi - \eta + \sin(\eta)]}{[1 - \cos(\eta)]}$;
 - ◊ on calcule $\sqrt{1 + \beta} = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2}}$ et pour $c dT$ donné on obtient dR correspondant, permettant de tracer un élément de courbe.
- ◊ remarque : la résolution numérique donne $\eta \in [\pi ; 2\pi]$ pour $T < 0$; pour $R < 0$ il faut alors utiliser $-\sqrt{1 + \beta} = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2}}$ pour conserver automatiquement le signe correct.



- Les trajectoires sont analogues à celles du diagramme de Kruskal-Szekeres ; elles montrent que des photons (ou de même des particules massives) peuvent passer de la région (IV) vers la région (III). Ceci met en évidence la nécessité de clarifier le prolongement du diagramme du côté $R < 0$.