MÉTRIQUE DE NOVIKOV - exercices

I. Particules en chute libre verticale

1. • Dans le but de construire une généralisation des repérages de Lemaître, on considère une particule en chute libre verticale, à partir d'une position $r_0 > r_s$ à l'instant $t = 0$, avec une vitesse initiale nulle.

a) Dans ce cas, avec les notations de Schwarzschild, la vitesse de chute peut s'écrire $v = -c\sqrt{1 - \frac{A}{A_0}}$ où $A_0 = A(r_0)$. Montrer qu'on peut en déduire l'expression $c\,t(r)$ pour r_0 fixé.

b) Représenter graphiquement ces variations.

c) Justifier que la connaissance de $c\,t(r, r_0)$ pour tout r_0 permet de connaître "formellement" $r_0(r, c\,t)$, position de départ telle que la particule arrive en r à la date t.

2. • De façon opportuniste, bien que ce ne soit pas le but initial de cette étude, on s'intéresse au croisement possible d'une particule ascendante et d'une autre descendante.

a) Indiquer l'allure des trajectoires pour les particules ascendantes.

b) Commenter l'intersection envisagée de deux trajectoires.

II. Généralisation des repérages de Lemaître

• Pour généraliser la transformation de Lemaître, on part d'une transformation de Lorentz avec une vitesse d'entraînement dépendant aussi de t : $v_e = -c\sqrt{1 - \frac{A(r)}{A(r_0(r,t))}}$.

• On obtient ainsi : $d\underline{R} = \sqrt{A_0}\,\frac{dr}{A} + \sqrt{A_0 - A}\,c\,dt$; $c\,dT = \sqrt{A_0}\,c\,dt + \sqrt{A_0 - A}\,\frac{dr}{A}$.

1. a) Montrer que $c\,dT$ est une différentielle totale.

b) Déterminer l'expression de $\frac{\partial r_0}{c\,\partial t}$.

c) Cela permet-il d'intégrer $c\,dT(r, t)$?

2. • Au contraire $d\underline{R}$ n'est pas une différentielle totale (il n'est pas demandé de le démontrer). On cherche donc un facteur intégrant F tel que $dR = F\,d\underline{R}$ soit une différentielle totale.

a) Préciser les dérivées partielles intervenant dans $d\underline{R}$.

b) Cela permet-il d'intégrer $dR(r, t)$?

III. Gaz de particules de faible densité

1. • On étudie un gaz de poussière dont la densité d'énergie est ε et la pression p ; le cas du vide s'obtient pour $p = 0$ et $\varepsilon = 0$. On suppose ce gaz sans rotation et comobile avec le repérage.

• Le gaz est décrit par le tenseur énergie-impulsion : $\mathbf{T}^{\mu\nu} = (p + \varepsilon)\,u^\mu\,u^\nu - p\,g^{\mu\nu}$, où p et ε sont mesurées dans le référentiel propre du fluide, ici le repérage comobile considéré.

a) Calculer le tenseur de Ricci pour une métrique de la forme : $ds^2 = \mathrm{e}^{2\alpha}\,c^2\,dT^2 - \mathrm{e}^{2\gamma}\,dR^2 - \mathrm{e}^{2\delta}\,d\Omega^2$ (on note ici les tenseurs $\mathbf{R}^{\mu\nu}$ et $\mathbf{T}^{\mu\nu}$ pour les distinguer des coordonnées R et T).

b) Simplifier pour tenir compte du fait que le repérage est comobile.

c) En déduire les équations du champ de gravitation.

2. • On considère maintenant la pression nulle. Afin de relier les coordonnées étudiées aux notation de Schwarzschild, on note par ailleurs $\mathrm{e}^{2\delta} = r^2$.

a) Écrire les équations du champ de gravitation.

b) Montrer que l'équation déduite de ${\mathbf{R}_0}^1$ permet d'en déduire : $\mathrm{e}^{2\gamma} = \frac{r'^2}{1+\not{f}(R)}$ où $\not{f}(R)$ est une fonction arbitraire respectant la condition $1 + \not{f} > 0$.

c) En reportant dans l'équation déduite de ${\mathbf{R}_1}^1$, montrer qu'on en déduit : $\dot{r}^2 = \not{f}(R) + \frac{F(R)}{r}$ où $F(R)$ est une autre fonction arbitraire.

3. • On étudie ensuite l'équation sur l'énergie.
a) En reportant les résultats précédents dans l'équation déduite de $\mathbf{R}_0{}^0$, montrer que : $r' \, r^2 \, \chi \, \varepsilon = F'$.
b) On considère maintenant que la densité d'énergie est nulle. Proposer une expression pour F .

IV. Gaz de pression négligeable

• On étudie un gaz de pression négligeable, sans rotation et comobile avec le repérage.

• On peut utiliser pour cela une métrique de la forme : $ds^2 = c^2 \, dT^2 - \frac{r'^2(R,T)}{1+f(R)} \, dR^2 - r^2(R,T) \, d\Omega^2$, où $f(R)$ est une fonction arbitraire respectant la condition $1 + f > 0$.

• On peut alors montrer que : $\dot{r}^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r}$ où $F(R)$ est une autre fonction arbitraire.

1. • En déduire une expression de $T(r, R)$ dans le cas $f > 0$.

2. • Considérer de même le cas $f < 0$.

V. Métrique à la Novikov et métrique de Lemaître

• On considère une métrique à la Novikov, avec $f(R) = \alpha - 1 = Cste$ et $\alpha \in \,]0\,;1[$.
• Comparer avec la métrique de Lemaître généralisée correspondant à α .

VI. Métrique de Novikov

• On considère la métrique de Novikov, avec $f(R) = -\frac{1}{1+R^2}$ (en prenant r_s pour unité) :
$$ds^2 = c^2 \, dT^2 - \frac{r'^2(R,T)}{1+f(R)} \, dR^2 - r^2(R,T) \, d\Omega^2 .$$
• Tracer les courbes caractéristiques de $r(R,T) = Cste$. Commenter.

VII. Métrique de Novikov

• On considère la métrique de Novikov, avec $f(R) = -\frac{1}{1+R^2}$ (en prenant r_s pour unité) :
$$ds^2 = c^2 \, dT^2 - \frac{r'^2(R,T)}{1+f(R)} \, dR^2 - r^2(R,T) \, d\Omega^2 .$$

1. • Tracer les courbes caractéristiques de $t(R,T) = Cste$ pour $r > r_s$. Commenter.

2. a) Calculer $t(R,T)$ le long de la courbe $r = 0$.
b) Tracer les courbes caractéristiques de $t(R,T) = Cste$ pour $r < r_s$. Commenter.

VIII. Métrique de Novikov

• On considère la métrique de Novikov, avec $f(R) = -\frac{1}{1+R^2}$ (en prenant r_s pour unité) :
$$ds^2 = c^2 \, dT^2 - \frac{r'^2(R,T)}{1+f(R)} \, dR^2 - r^2(R,T) \, d\Omega^2 .$$
• Cela correspond à : $c\,T = \frac{1}{2}(1+R^2)^{3/2} \, [\pi - \eta + \sin(\eta)]$; $r = \frac{1}{2}(1+R^2) \, [1 - \cos(\eta)]$.

1. • Justifier que la variable $\eta(R,T)$ sert en pratique à paramétrer l'évolution temporelle sur les trajectoires comobiles.

2. • Montrer qu'on peut étudier la limite $R \to 0$ avec $\eta = Cste$ (au lieu de $T = Cste$).

IX. Métrique de Novikov

• On considère la métrique de Novikov, avec $\not{f}(R) = -\frac{1}{1+R^2}$ (en prenant r_s pour unité) :

$$ds^2 = c^2\, dT^2 - \frac{r'^2(R,T)}{1+\not{f}(R)}\, dR^2 - r^2(R,T)\, d\Omega^2 \ .$$

1. • Cela correspond à : $c\,T = \frac{1}{2}(1+R^2)^{3/2}\,[\pi - \eta + \sin(\eta)]$; $r = \frac{1}{2}(1+R^2)\,[1-\cos(\eta)]$.

a) En déduire $d\eta(R,T)$.

b) Déterminer $\dot{r}(R,T)$ et $r'(R,T)$.

2. • La métrique est-elle définie pour $R = 0$?

3. • En notant $\overset{\circ}{\square}$ les dérivées par rapport à s , le lagrangien $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[c^2\, \overset{\circ}{T}^2 - \frac{r'^2}{1+\not{f}}\, \overset{\circ}{R}^2\right]$ donne les équations du mouvement : $c\, \overset{\circ\circ}{T} = -\frac{r'\,\dot{r}'}{1+\not{f}}\, \overset{\circ}{R}^2$; $\overset{\circ\circ}{R} = \left(\frac{r''}{r'} - \frac{\not{f}'}{1+\not{f}}\right) \overset{\circ}{R}^2$.

a) Étudier le comportement du coefficient $\frac{r'\,\dot{r}'}{1+\not{f}}$ dans la limite $R = 0$.

b) Étudier de même le coefficient $\left(\frac{r''}{r'} - \frac{\not{f}'}{1+\not{f}}\right)$.

X. Métrique de Novikov

• On considère la métrique de Novikov, avec $\not{f}(R) = -\frac{1}{1+R^2}$ (en prenant r_s pour unité) :

$$ds^2 = c^2\, dT^2 - \frac{r'^2(R,T)}{1+\not{f}(R)}\, dR^2 - r^2(R,T)\, d\Omega^2 \ .$$

• Tracer les trajectoires de photons émis, depuis la région (IV), dans le sens sortant et dans le sens entrant.