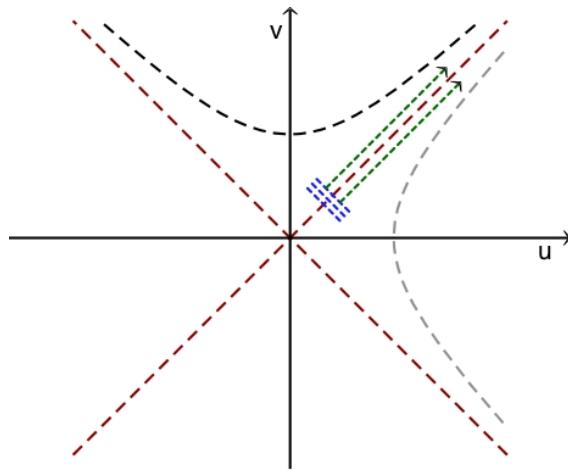


## PROPRIÉTÉS du DIAGRAMME de KRUSKAL-SZEKERES - corrigé des exercices

### I. Trajectoire de photons

- Dans la mesure où les notations de Kruskal-Szekeres supposent que les coordonnées statiques comme celles de Schwarzschild ne sont plus appropriées au niveau de l'horizon (aucune particule de référence ne peut y rester immobile et les photons ne peuvent pas servir de telle référence), on pourrait se contenter de conclure que c'est de là que provient l'étrangeté, qui ne serait ainsi qu'apparente.
- Mais plus précisément, les trajectoires corpusculaires peuvent être considérées comme la limite géométrique des propagations quantiques. Si on réinterprète ces "rayons" comme les lignes orthogonales aux surfaces d'ondes électromagnétiques, la singularité n'est alors qu'une limite abstraite séparant des photons se propageant à (et vers) l'extérieur et d'autres se propageant à (et vers) l'intérieur.



- Dans la représentation de Schwarzschild, ceci décrit des photons se propageant radialement de part et d'autre depuis la singularité.
- ◊ remarque : ce n'est pas indépendant de la création de paires de particules à ce niveau, à partir de l'énergie du vide, comme envisagé dans les effets Hawking et Unruh.

### II. Durée de chute d'une particule massive et diagramme de Kruskal-Szekeres

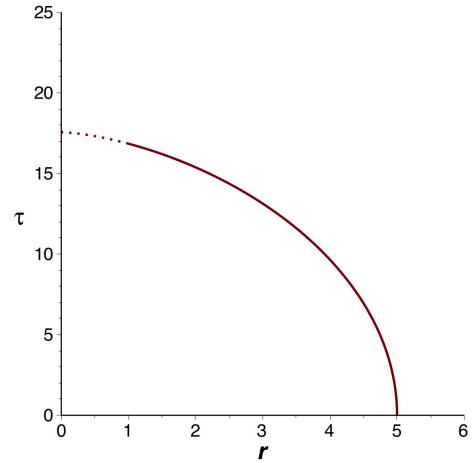
1.
  - Si on exclut les particules provenant de l'infini, les particules dont la vitesse initiale leur permettrait d'atteindre l'infini ne sont à considérer que si leur mouvement initial est vers le bas. Dans ce cas, leur durée propre de chute ne peut être qu'inférieur à celui correspondant à un départ immobile.
  - Pour les particules n'ayant pas une vitesse initiale qui leur permettrait d'atteindre l'infini, on peut se limiter à une chute libre avec vitesse initiale nulle en raisonnant à partir du point de la trajectoire où la vitesse s'annule. On peut donc dans tous les cas supposer le départ immobile.
  - L'étude de la partie radiale de la métrique ( $ds^2 = A c^2 dt^2 - C dr^2$ ) fait intervenir les symboles de Christoffel suivants :  $\Gamma_{01}^0 = \frac{A'}{2A}$  ;  $\Gamma_{00}^1 = \frac{A'}{2C}$  ;  $\Gamma_{11}^1 = \frac{C'}{2C}$ .
  - Les équations du mouvement peuvent s'écrire :  $\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$ .
  - L'équation pour la variable temporelle  $x^0 = c t$  peut s'écrire avec la notation  $T = \frac{c dt}{dt}$  ; on obtient ainsi :  $\frac{dT}{dt} + 2 \Gamma_{01}^0 T \frac{dr}{dt} = 0$  puis  $A c dt = \alpha dt$ .
  - Pour un départ immobile  $d\tau^2 = A_0 dt^2$  avec  $A_0 = A(r_0)$  ; on obtient ainsi :  $A_0 c^2 = \alpha^2$  puis finalement pour un départ extérieur :  $A dt = \sqrt{A_0} d\tau$  ou encore :  $T = c \frac{\sqrt{A_0}}{A}$ .
  - La seconde équation peut être obtenue plus simplement à l'aide de la métrique (compte tenu du fait que  $A C = 1$ ) :  $R = \frac{dr}{dt}$  ;  $\frac{ds^2}{dt^2} = c^2 = A T^2 - C R^2$  ;  $R^2 = A^2 T^2 - A c^2 = (A_0 - A) c^2$ .

- Pour une chute libre avec vitesse initiale nulle  $R \leq 0$  donc  $R = -c \sqrt{A_0 - A}$ .

- Cette équation n'est pas simple à intégrer numériquement car le membre de droite est nul dans les conditions initiales ; il est plus simple d'intégrer l'équation du second ordre obtenue en dérivant l'expression quadratique :

$$2R \frac{d^2r}{d\tau^2} = -c^2 \frac{dA}{dr} \frac{dr}{d\tau} ; \quad \frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{c^2 r_s}{2 r^2}.$$

- On obtient des courbes d'allure parabolique correspondant à des durées propres finies (la partie pour  $r < r_s$  n'est pas contre acceptable qu'en supposant valide l'interprétation de Kruskal-Szekeres).



2. • Une telle affirmation est peu convaincante puisque la longueur d'un arc élémentaire "lue" sur le diagramme est  $\sqrt{du^2 + dv^2}$  (en se limitant pour simplifier à un mouvement radial), alors que la durée propre correspond à :  $c d\tau = ds = \sqrt{\frac{4 r_s^3}{r}} e^{-r/2r_s} \sqrt{dv^2 - du^2}$  où  $r = r(u, v)$ .
- On peut suggérer que la limitation visualisée sur le graphique implique celle recherchée dès lors que  $\sqrt{dv^2 - du^2} < \sqrt{du^2 + dv^2}$ . Mais  $ds$  ne se limite pas à ce terme, or la divergence de  $\sqrt{\frac{4 r_s^3}{r}}$  à l'approche de  $r = 0$  fait que, tant qu'on n'a pas démontré le contraire, il pourrait être possible que la durée propre soit infinie.
  - L'affirmation est en fait acceptable si et seulement si on se limite à des portions de trajectoires ne rejoignant pas  $r = 0$  ; par exemple une portion de trajectoire allant jusqu'à  $r = r_s$ .

### III. Trajectoires de particules massives

- 1.a. • En notant  $K = \frac{4}{r} e^{-r}$  on obtient :  $K' = -\frac{4(r+1)}{r^2} e^{-r} = -\frac{r+1}{r} K$ .

- 1.b. • D'après la définition de  $W_0$  on obtient :  $W' = \frac{e^{-W}}{1+W} = \frac{e}{4} K$ .

2. • On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} g_{00} &= K ; \quad g_{11} = -K ; \quad g_{22} = -r^2 ; \quad g_{33} = -r^2 \sin^2(\theta) ; \\ g^{00} &= \frac{1}{K} ; \quad g^{11} = -\frac{1}{K} ; \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2} ; \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} . \\ \Gamma_{000} &= \Gamma_{011} = -\Gamma_{110} = \frac{r+1}{4r} K^2 v ; \quad \Gamma_{100} = -\Gamma_{001} = \Gamma_{111} = \frac{r+1}{4r} K^2 u ; \\ \Gamma_{220} &= -\Gamma_{022} = \frac{r}{2} K v ; \quad \Gamma_{330} = -\Gamma_{033} = \frac{r}{2} \sin^2(\theta) K v ; \\ \Gamma_{221} &= -\Gamma_{122} = -\frac{r}{2} K u ; \quad \Gamma_{331} = -\Gamma_{133} = -\frac{r}{2} \sin^2(\theta) K u ; \\ \Gamma_{332} &= -\Gamma_{233} = -r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) ; \\ \Gamma_{00}^0 &= \Gamma_{11}^0 = \Gamma_{10}^1 = \frac{r+1}{4r} K v ; \\ \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{00}^1 = \Gamma_{11}^1 = -\frac{r+1}{4r} K u ; \\ \Gamma_{20}^2 &= \Gamma_{30}^3 = -\frac{1}{2r} K v ; \quad \Gamma_{02}^0 = -\frac{r}{2} v ; \quad \Gamma_{03}^0 = -\frac{r}{2} \sin^2(\theta) v ; \\ \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2r} K u ; \quad \Gamma_{12}^1 = -\frac{r}{2} u ; \quad \Gamma_{13}^1 = -\frac{r}{2} \sin^2(\theta) u ; \\ \Gamma_{32}^3 &= \cot(\theta) ; \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin(\theta) \cos(\theta) . \end{aligned}$$

- 3.a. • Les équations du mouvement peuvent s'écrire :  $\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0$ .
- Ainsi :  $\ddot{v} - \frac{K'}{4} v \cdot (\dot{v}^2 + \dot{u}^2) + \frac{K'}{2} u \dot{v} \dot{u} = 0$  ;  $\ddot{u} + \frac{K'}{4} u \cdot (\dot{v}^2 + \dot{u}^2) - \frac{K'}{2} v \dot{v} \dot{u} = 0$ .

- 3.b. • On peut considérer les combinaisons :

$$\ddot{v} + \dot{u} - \frac{K'}{4} (\dot{v} + \dot{u})^2 (v - u) = 0 ;$$

$$\ddot{v} - \dot{u} - \frac{K'}{4} (\dot{v} - \dot{u})^2 (v + u) = 0 .$$

- Il apparaît que cela peut s'écrire plus simplement avec  $\xi = v + u$  et  $\eta = v - u$  :

$$\ddot{\xi} - \frac{K'}{4} \eta \dot{\xi}^2 = 0 ; \quad \ddot{\eta} - \frac{K'}{4} \xi \dot{\eta}^2 = 0 .$$

• Pour  $\dot{\xi} = 0$ , on obtient  $\ddot{\xi} = 0$  donc  $\dot{\xi} = 0 = Cste$  puis  $\xi = Cste$  ; ceci décrit les trajectoires des photons entrants. Il en est de même pour  $\eta$  ; cela décrit les photons sortants.

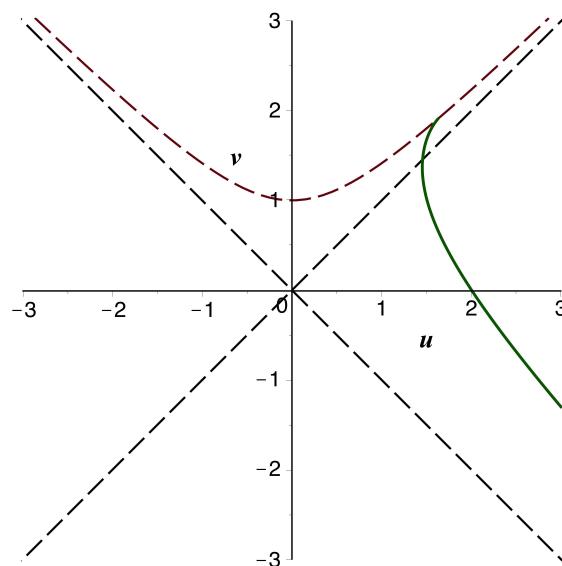
• Pour les particules matérielles  $\dot{\xi}$  et  $\dot{\eta}$  ne s'annulent pas, mais  $\xi$  ou  $\eta$  s'annule au passage de l'horizon. On constate que dans ce cas  $\dot{\eta}$  ou  $\dot{\xi}$  s'annule, donc (puisque  $K'$  y est régulier) la traversée se fait sans irrégularité : on peut donc envisager une résolution numérique par la méthode d'Euler.

◊ remarque : si on cherche à appliquer une méthode d'Euler en fonction de  $(u, v)$  mais en partant des expressions  $du$  et  $dv$  déduites de celle de  $u(r, t)$  et  $v(r, t)$ , on est confronté à un passage à la limite délicat au niveau de l'horizon ; cette difficulté est évitée ici.

• Mais par ailleurs, la métrique :  $ds^2 = K d\xi d\eta$  impose pour les particules matérielles  $\dot{\xi} \dot{\eta} = \frac{1}{K}$  ; les deux dérivées premières n'étant pas indépendantes, il faut en tenir compte pour imposer leurs conditions initiales. Plus efficacement, on peut à profit remplacer l'une des deux équations différentielles précédentes, du second ordre, par cette dernière, du premier ordre.

◊ remarque : pour les photons  $ds^2 = 0$  redonne directement  $\dot{\xi} = 0$  ou  $\dot{\eta} = 0$ .

• Ceci permet de tracer les trajectoires par intégration numérique.



#### IV. Diagramme de Kruskal-Szekeres revisité

1. • L'angle par rapport au point  $(u = 0 ; v = 0)$  peut s'écrire :  $\psi = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$ .

◊ remarque : l'expression modulo  $\pi$  nécessitera de préciser les signes ensuite.

◊ remarque : cet angle est en fait une fonction de  $t$  indépendante de  $r$ .

- Les coordonnées souhaitées peuvent s'écrire :

$$R = 1 + \sqrt{u^2 + v^2} \cos(2\psi) ; \quad cT = \sqrt{u^2 + v^2} \sin(2\psi) .$$

- On peut utiliser :  $\cos(2\psi) = 2 \cos^2(\psi) - 1$  ;  $\sin(2\psi) = 2 \sin(\psi) \cos(\psi)$ .

- Ceci donne en simplifiant :

$$R = 1 + \frac{u^2 - v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} ; \quad cT = \frac{2uv}{\sqrt{u^2 + v^2}} .$$

2. • La limite  $r = 1$  ( $r_s$  pris comme unité) correspond à  $u = |v|$  pour la région (I), seule concernée ici. Ceci donne une représentation paramétrique (selon  $v$ ) de  $R$  et  $cT$ .

3. • La limite  $r = 0$  correspond à  $v = \pm\sqrt{1+u^2}$  ; cela donne une représentation paramétrique (selon  $u$ ) de  $R$  et  $cT$ .
4. • Les trajectoires des photons correspondent à  $u = Cte \pm v$  ; cela donne une représentation paramétrique (selon  $u$ ) de  $R$  et  $cT$ .  
• Pour trouver la limite du tracé (pour  $r = 0$ ), la résolution de l'équation :  $1 + u^2 = (u - Cte)^2$  donne :  $u_{lim} = \frac{Cte^2 - 1}{2Cte}$ .  
◊ remarque : ces coordonnées ont essentiellement une utilité pour la visualisation des propriétés caractéristiques ; l'expression très compliquée de la métrique correspondante n'a aucune utilité pratique.

## V. Diagramme de Schwarzschild revisité

1. • En prévoyant de le diviser par 2, l'angle par rapport au point ( $r = r_s$ ;  $t = 0$ ) peut s'écrire (avec  $r_s$  comme unité) :  $2\psi = \arctan\left(\frac{ct}{r-1}\right)$ .  
◊ remarque : l'expression modulo  $\pi$  nécessitera de préciser les signes ensuite.  
• Les coordonnées souhaitées peuvent s'écrire :  

$$u_s = \sqrt{(r-1)^2 + (ct)^2} \cos(\psi) ; v_s = \sqrt{(r-1)^2 + (ct)^2} \sin(\psi).$$
• On peut utiliser :  $\cos(\psi) = \sqrt{\frac{1+\cos(2\psi)}{2}}$  ;  $\sin(\psi) = \sqrt{\frac{1-\cos(2\psi)}{2}}$ .  
• Ceci donne en simplifiant :  

$$u_s = \sqrt{\frac{(r-1)^2 + (ct)^2 + (r-1)\sqrt{(r-1)^2 + (ct)^2}}{2}} ; v_s = \sqrt{\frac{(r-1)^2 + (ct)^2 - (r-1)\sqrt{(r-1)^2 + (ct)^2}}{2}}.$$
• Tant qu'on reste du côté  $u_s > 0$ , on peut préciser le signe par :  $\text{sgn}(v_s) = \text{sgn}(ct)$ .  
• Pour tracer du côté  $u_s < 0$ , partie gauche des régions (II) et (IV), il y a probablement une astuce analogue, mais on peut chercher par tâtonnements la limite sur  $r$  donnant  $u_s = 0$ , puis changer le signe de l'expression pour tracer le reste de la courbe.
2. • Cela donne une représentation paramétrique (avec  $ct$ ) pour tracer les courbes  $r = Cste$ .
3. • En reportant les expressions  $ct(r)$  obtenues en notations de Schwarzschild, on obtient une représentation paramétrique (avec  $r$ ) pour tracer les trajectoires des particules.  
◊ remarque : ces coordonnées ont essentiellement une utilité pour la visualisation des propriétés caractéristiques ; l'expression très compliquée de la métrique correspondante n'a aucune utilité pratique.

## VI. Particularités de la singularité centrale

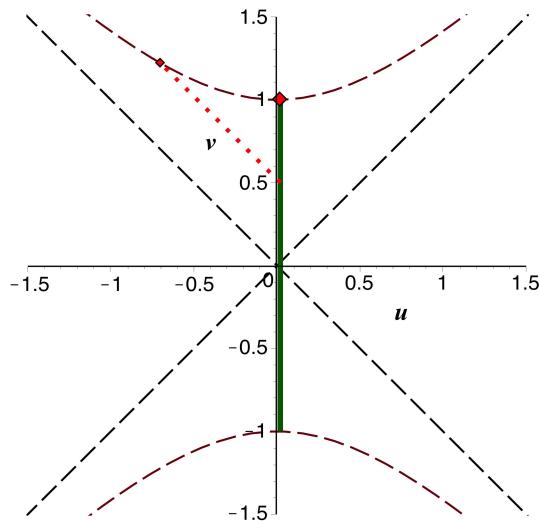
1. • L'origine du temps étant arbitraire (au moins dans la région (I), dont le comportement est "classique"), on peut proposer une variable  $t' = t - t_0$ .  
• Les coordonnées de Finkelstein correspondantes sont alors :  $U' = U + ct_0$  ;  $V' = V + ct_0$ .  
• En passant aux exponentielles et en notant  $\lambda = e^{ct_0/2r_s}$ , la méthode donnant les coordonnées de Kruskal-Szekeres correspond à :  

$$\xi' = \frac{\xi}{\lambda} ; \eta' = \lambda \eta ;$$

$$u' = \frac{\eta' - \xi'}{2} = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} u + \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} v ; v' = \frac{\eta' + \xi'}{2} = \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} u + \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} v.$$
• On vérifie que  $r$  est inchangé, puisque  $u'^2 - v'^2 = u^2 - v^2$  ; par ailleurs  $ds^2$  est inchangé puisque  $dv'^2 - du'^2 = dv^2 - du^2$ .  
• Cette transformation se comporte de façon un peu analogue à une transformation de Lorentz pour les variables  $x$  et  $ct$  : l'origine est inchangée ; les diagonales  $u = \pm v$  sont inchangées ; l'axe des  $u'$  et l'axe des  $v'$  sont obliques ascendants (rapprochés de  $u = v$ ) dans le cas  $t_0 > 0$ .
2. • Dans la région (II), la variable  $r$  est du genre temps et la variable  $t$  est du genre espace ; cela ne modifie pas contre rien à la possibilité de changer l'origine pour  $t$ . On obtient de façon analogue :  

$$u' = \frac{\eta' + \xi'}{2} = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} u + \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} v ; v' = \frac{\eta' - \xi'}{2} = \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} u + \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} v.$$

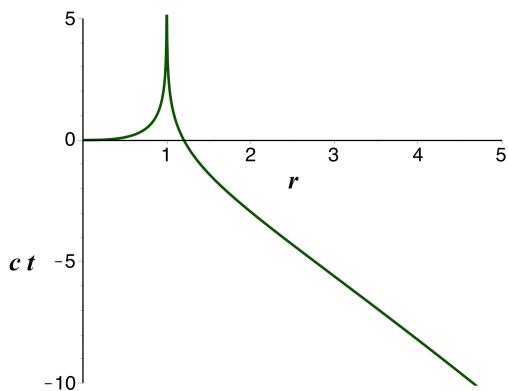
- Ceci augmente l'étrangeté de la séparation en deux parties de la singularité centrale, pour  $u = 0$ , puisque ce cas particulier n'est pas invariant par changement arbitraire de l'origine de  $t$ .
  - Les difficultés de ce type sont par contre évitées dès lors qu'on considère que l'invariance temporelle est brisée par l'extremum d'expansion de la matière provenant d'un trou blanc, qui s'effondre ensuite en trou noir.
3. • En supposant que la métrique pour  $u < 0$  soit celle dans le vide, la matière suivant la trajectoire considérée semblerait pouvoir émettre un photon vers la singularité centrale pour  $v > 0$  (trou noir).  
 ♦ remarque : d'éventuels photons émis pour  $v < 0$  rejoindraient la région (IV) décrivant "un autre extérieur" si cela existait.



- On constate alors que de tels photons, bien que suivant la même trajectoire radiale en étant plus rapides que la matière qui les a émis, arriveraient **plus tard** (valeur de  $v$  plus grande). Cela est totalement contradictoire, donc de tels photons sont impossibles : la quantité de matière en transit est forcément assez importante pour que la métrique pour  $u < 0$  corresponde au cas intérieur. Si la singularité centrale existe dans cette partie du diagramme, la pente de sa trajectoire est forcément positive.

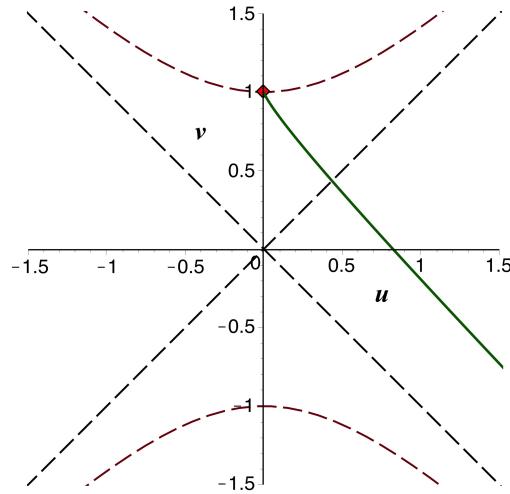
## VII. Limite de la zone extérieure

1. • La trajectoire de cette matière finissant en trou-noir n'est pas évidente dans la mesure où le champ est celui qu'elle crée elle-même, mais ici on ne cherche qu'à décrire l'allure de la trajectoire. Pour une répartition de masse sphérique (d'épaisseur négligeable) on suppose que le champ subi est suffisamment semblable à celui à l'extérieur et qu'on peut donc raisonner qualitativement comme pour une particule ponctuelle. Dans ce cas, la trajectoire se termine à l'apparition de la singularité centrale.
- Avec les notations de Schwarzschild, cela correspond à :  $c t = -\frac{2}{3} \sqrt{r} (r + 3) + \ln \left( \left| \frac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{r}-1} \right| \right)$ .



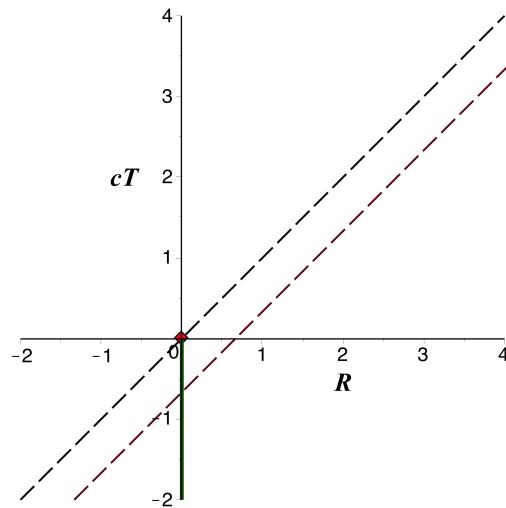
Dans cette représentation, toute la partie au dessous de la courbe correspond à l'intérieur de la sphère et n'est pas décrit par la métrique de Kruskal-Szekeres (ni celle de Schwarzschild). Aucune trajectoire sortante ne peut croiser celle-ci (ni a fortiori deux fois) puisqu'elle ne peut pas aller en dessous.

- Ceci n'empêche en rien de représenter la trajectoire dans un diagramme de Kruskal-Szekeres ; il suffit pour cela d'utiliser les relations de changement de notations.



De même dans cette représentation, toute la partie à gauche de la courbe correspond à l'intérieur de la sphère et n'est pas décrit par la métrique de Kruskal-Szekeres. De façon plus générale, la limite à droite de la région intérieure suit toujours une trajectoire analogue, forcément avec  $u > 0$  ; il en est de même symétriquement pour la disparition d'un trou-blanc avec expulsion de matière jusqu'à l'infini. Ainsi, de la façon la plus générale, la zone extérieure ne peut pas dépasser du côté  $u < 0$  .

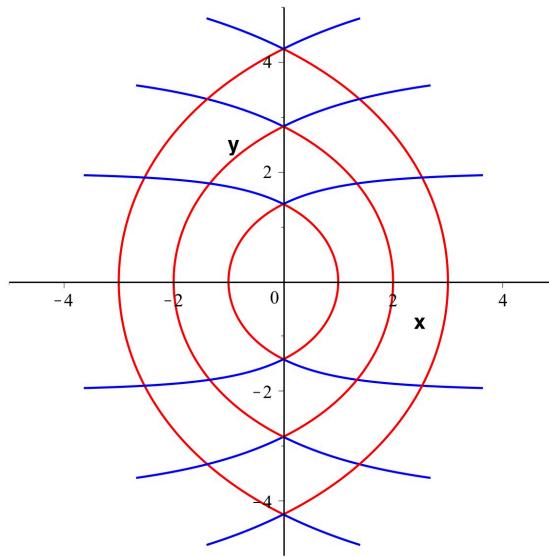
2.
  - De même dans cette représentation, toute la partie à gauche de la courbe correspond à l'intérieur de la sphère et n'est pas décrit par la métrique de Lemaître.



En particulier, toute trajectoire sortante ayant une divergence en  $R = -\infty$  au niveau de l'horizon ne peut donc pas le franchir, ce qui élimine de même tous les cas de croisements anormaux.

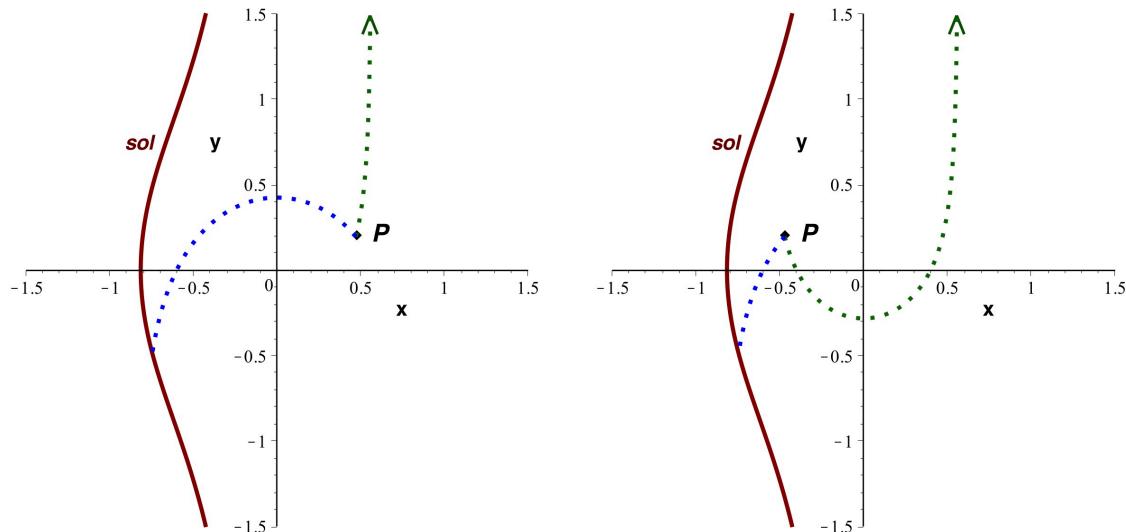
### VIII. Diagramme de Kruskal-Szekeres “isotrope” revisité

- Pour la région (I), on peut considérer la distance  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$  et l'angle  $\psi$  tel que  $u = \rho \cos(\psi)$  et  $v = \rho \sin(\psi)$ . On envisage alors un diagramme avec des coordonnées (le facteur de projection  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  est ici sans intérêt) :  $x = \rho \cos(2\psi) = \frac{u^2 - v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}}$  ;  $y = \rho \sin(2\psi) = \frac{2uv}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ .
  - Les équations des courbes représentatives pour  $u = Cste$  et  $v = Cste$  peuvent être déduites par combinaison :  $y^2 = \frac{4u^2v^2}{u^2+v^2}$  ;  $v^2 = \frac{u^2y^2}{4u^2-y^2}$  ;  $x = \frac{2u^2-y^2}{\sqrt{4u^2-y^2}}$  ;  $u^2 = \frac{v^2y^2}{4v^2-y^2}$  ;  $x = \frac{y^2-2v^2}{\sqrt{4v^2-y^2}}$ .
  - Les courbes représentatives pour  $u = Cste$  peuvent aussi être obtenues par un tracé paramétrique en fonction de  $v$  (et réciproquement). La région (III) est symétrique ; dans ce cas, elle peut aussi être obtenue en permutant les rôles de  $u$  et  $v$ .
- ◊ remarque : la singularité (horizon) est ici représentée par l'axe vertical, pour lequel  $u = \pm v$  ; la non bijectivité des notations de Kruskal-Szekeres dans ce cas a pour conséquence que les limites de  $u$  à droite et à gauche de l'axe sont différentes (de signe contraire).



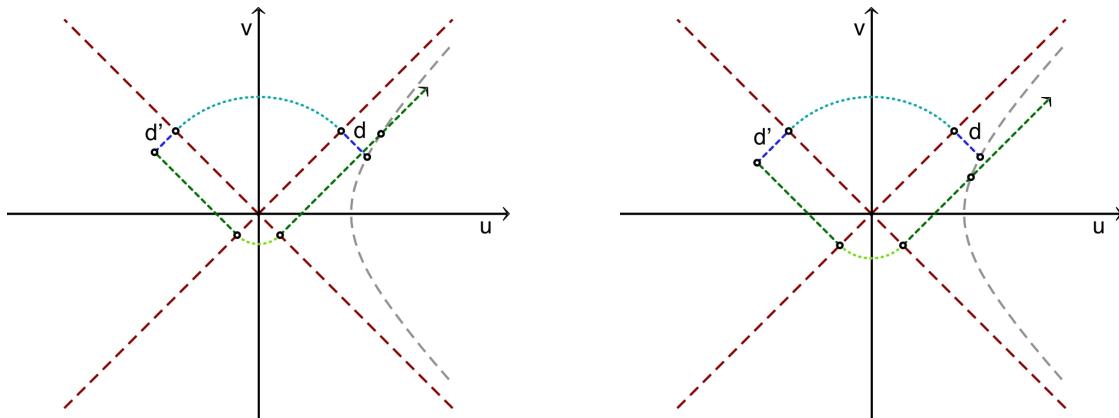
- Les trajectoires des photons entrants et sortants peuvent être obtenues de même ; l'émission depuis un point intérieur est tout à fait analogue à celle depuis l'extérieur.

◊ remarque : la forme “arrondie” des trajectoires suggère qu'on peut très raisonnablement les représenter dans un diagramme de Kruskal-Szekeres “classique” en raccordant par un arc de cercle symbolique les parties rectilignes des régions (I) et (III).



## IX. Synchronisation des horloges

- On peut considérer un point  $P_0$  sur la singularité :  $(u_0; v_0)$  avec  $u_0 = v_0$ . Ce point est a priori arbitraire dans la mesure où la singularité correspond à l'ensemble des deux diagonales.
- On envisage alors un photon “entrant” émis depuis un point  $P_1$   $(u_0 + \varepsilon; v_0 - \varepsilon)$  dans la région (I). Sur le diagramme, la “distance” entre  $P_0$  et  $P_1$  est  $d = \varepsilon\sqrt{2}$ .
- On considère ensuite un point  $P_2$   $(-u_0 - \varepsilon'; v_0 - \varepsilon')$  dans la région (III) où ce photon arrive, puis est renvoyé vers l’extérieur. Une fois passé dans la région (I), la “distance” entre la diagonale croissante et la trajectoire du photon est  $d' = \varepsilon'\sqrt{2}$ .
- Si on suppose  $\varepsilon' < \varepsilon$ , le photon reçu en retour par  $P_1$  arrive après le départ du photon initialement émis. Par contre, pour  $\varepsilon' > \varepsilon$ , le retour intervient avant le départ du photon émis (il faudrait un train d’onde codé pour espérer le reconnaître).
- ◊ remarque : pour étudier l’éventuelle synchronisation des horloges, on met à part ici la contradiction découlant du second cas.
- Pour synchroniser les horloges de part et d’autre de la singularité, il faudrait pouvoir déterminer une unique limite du milieu de l’intervalle d’aller-retour lorsque  $\varepsilon$  et  $\varepsilon' \rightarrow 0$ . Or le résultat dépend de la relation entre  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  lors du passage à la limite.



- Finalement, même si on utilise une même variable  $t$  des deux côtés de la singularité, les valeurs de part et d’autre ne peuvent donc pas être comparées.
- ◊ remarque : même si on obtenait une durée apparente d’aller-retour  $D = \sqrt{A} \Delta t$  non ambiguë pour l’expérimentateur extérieur, on pourrait douter de sa signification puisque la partie intérieure du trajet est à la fois infinie pour que le photon entrant arrive en  $P_2$  depuis la singularité, puis encore infinie pour que le photon renvoyé rejoigne la singularité ; on peut d’ailleurs légitimement se demander s’il est réellement possible que le processus soit réalisable.