RG II - GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE EN ESPACE COURBE

1. Métrique locale

◊ remarque : dans un but d'application à relativité générale, la notation à quatre dimensions (incluant le temps) est associée à des indices en caractères grecs $(0,\ 1,\ 2,\ 3)$, réservant par opposition les indices en caractères latins pour la partie spatiale $(1,\ 2,\ 3)$, lorsque celle-ci est étudiée à part.

• Un défaut essentiel de l'approche utilisée dans un espace plat, c'est de présupposer que les “variations” $d\overleftrightarrow{M}$ sont dans le même espace que le point M ; or par exemple, pour un point M à la surface d'une sphère, ces “variations” sont à considérer comme objets du plan tangent en M à la sphère.

• Pour se référer aux propriétés locales de l'espace considéré, on peut se baser sur la description de M par un jeu de coordonnées x^α. Un changement de repère local $\underline{x}^\beta \rightarrow x^\alpha$ est tel que les “variations” (dans l'espace tangent) suivent la loi : $dx^\alpha = \underline{\partial}_\beta x^\alpha \, d\underline{x}^\beta$ (et réciproquement $d\underline{x}^\beta = \partial_\alpha \underline{x}^\beta \, dx^\alpha$) ; les objets dont les coordonnées sont de ce type (et notées avec des indices en haut) sont nommés “tenseurs contravariants”.

Au contraire, pour une fonction scalaire φ, les quantités $\partial_\alpha\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$ se transforment selon : $\partial_\alpha\varphi = \partial_\alpha \underline{x}^\beta \, \underline{\partial}_\beta\varphi$ (et réciproquement $\underline{\partial}_\alpha\varphi = \underline{\partial}_\alpha x^\beta \, \partial_\beta\varphi$), c'est-à-dire la loi inverse. Les objets dont les coordonnées sont de ce type (et notées avec des indices en bas) sont nommés “tenseurs covariants”.

• On peut définir l'élément de longueur selon $ds^2 = g_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \, dx^\beta$. Lors des changements de coordonnées, on constate que le “tenseur métrique” $g_{\alpha\beta}$ est effectivement un tenseur, dans la mesure où ds est un scalaire.

Dans un espace “plat” en coordonnées cartésiennes, on retrouve la “matrice diagonale” $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, associée à la relativité restreinte, dont les coefficient non nuls sont : $\eta_{00} = 1$ et $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$.

2. Dérivation covariante

• Soit un vecteur défini en un point M par ses coordonnées A^α (il se comporte comme un objet de l'espace tangent en M) ; lorsque M se déplace, les variations des coordonnées du vecteur (grandeurs par lesquelles il est connu) subissent deux causes de variation : d'une part le vecteur varie, d'autre part il est exprimé par rapport à une base locale qui varie.

Ainsi le jeu de composantes dA^α ne se comporte pas comme un vecteur dans un changement de coordonnées $(\underline{x}^\beta \to x^\alpha)$:

$$A^\alpha = \underline{\partial}_\beta x^\alpha \, \underline{A}^\beta \quad ; \quad dA^\alpha = \underline{\partial}_\beta x^\alpha \, d\underline{A}^\beta + \underline{\partial}_{\beta\gamma} x^\alpha \, d\underline{x}^\gamma \, \underline{A}^\beta .$$

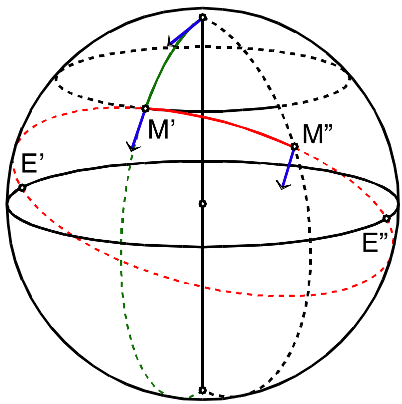
◊ remarque : de façon analogue ni $\partial_\alpha A^\beta$ ni $\partial_\alpha A_\beta$ ne sont des tenseurs ; de même $\partial_\alpha A^\alpha$ n'est pas un scalaire (par contre $\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ est un tenseur).

• Pour chercher quelle quantité vectorielle doit remplacer dA^α en coordonnées curvilignes, on peut étudier la variation δA^α des coordonnées d'un vecteur "constant" causée par son simple déplacement "parallèlement" à lui même.

• Afin de préciser ce "transport parallèle", il est utile d'envisager le cas d'un vecteur d'un espace courbe simple : une sphère incluse dans l'espace plat $\mathbb{R}^3$ (en prenant soin de ne garder que les propriétés intrinsèques de la sphère).

Le transport le plus "parallèle" possible est selon l'orientation des géodésiques (lignes les plus courtes joignant deux points donnés).

Pour la sphère, ces géodésiques sont des "grands cercles" centrés au centre de la sphère. Les méridiens sont géodésiques, mais non les parallèles (par exemple le géodésique partant de M' tangentiellement au parallèle local, recoupe l'équateur en E' et E'').



Dans ces conditions, les coordonnées du vecteur (qui servent à le mesurer) peuvent changer dès lors que la base locale subit une transformation autre qu'un simple "transport parallèle".

Ainsi l'exemple de vecteur déplacé de M' à M'' voit son orientation modifiée par rapport aux méridiens et parallèles locaux : sa coordonnée A^{φ} initialement nulle ne le reste pas. C'est l'effet considéré.

◊ remarque : cette propriété n'est pas une caractéristique des espaces courbes, elle existe aussi dans un espace plat repéré par des coordonnées “courbes” (par exemple en coordonnées polaires dans le plan).

• Cet effet doit ne pas être confondu avec le suivant : certes, dans l'exemple précédent, un observateur (à trois dimensions) peut avoir l'impression que le vecteur tangent est modifié lors d'un déplacement, parce que le plan tangent change (par exemple lors du déplacement depuis le pôle jusqu'en M' le long d'un méridien), mais un observateur (à deux dimension) “appartenant” à la sphère “voit” le vecteur inchangé (sa direction reste celle du méridien).

◊ remarque : pour s'en convaincre, on peut comparer les observations expérimentales décrites en annexe.

• La variation δA^{α} des coordonnées d'un vecteur “constant” causée par son transport “parallèle” doit être linéaire (pour s'appliquer aux combinaisons de vecteurs) ; on peut donc l'écrire sous la forme : $\delta A^{\alpha} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\, A^{\beta}\, dx^{\gamma}$.

Pour un vecteur contravariant, la quantité vectorielle qui remplace dA^{α} en coordonnées curvilignes est donc celle qui exprime, dans la base locale, la variation des coordonnées du vecteur :

$$DA^{\alpha} = dA^{\alpha} - \delta A^{\alpha} = dA^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\, A^{\beta}\, dx^{\gamma}.$$

On en déduit les “dérivées covariantes” : $D_{\alpha}A^{\beta} = \partial_{\alpha}A^{\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\gamma\alpha}\, A^{\gamma}$.

◊ remarque : comme le suggère l'expression précédente de la variation dA^{α}, les coefficients $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ sont associés aux effets des dérivées secondes $\underline{\partial}_{\beta\gamma}x^{\alpha}$ dans les changements de coordonnées.

• Pour un vecteur covariant, on peut considérer que le produit scalaire (invariant par transport) avec un vecteur B^{α} arbitraire : $\delta(A_{\alpha}B^{\alpha}) = 0$, donc :

$$B^{\alpha}\, \delta A_{\alpha} = -A_{\alpha}\, \delta B^{\alpha} = A_{\alpha}\, \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\, B^{\beta}\, dx^{\gamma} = A_{\beta}\, \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\gamma}\, B^{\alpha}\, dx^{\gamma} \;\; ;$$

$$\delta A_{\alpha} = \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\gamma}\, A_{\beta}\, dx^{\gamma} \;\; ;$$

$$DA_{\alpha} = dA_{\alpha} - \delta A_{\alpha} = dA_{\alpha} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\gamma}\, A_{\beta}\, dx^{\gamma}.$$

On en déduit les “dérivées covariantes” : $D_\alpha A_\beta = \partial_\alpha A_\beta - \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}\, A_\gamma$.

• Ces relations se généralisent pour les tenseurs à un nombre quelconque d'indices ; ainsi : $D_\alpha A_\beta{}^{\mu\nu} = \partial_\alpha A_\beta{}^{\mu\nu} - \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}\, A_\gamma{}^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\alpha}\, A_\beta{}^{\gamma\nu} + \Gamma^\nu{}_{\gamma\alpha}\, A_\beta{}^{\mu\gamma}$.

◊ remarque : on constate ainsi que la plupart des relations correspondantes établies en espace plat sont encore valables en espace courbe.

🕮 *exercices n° I, II et III.*

3. Propriétés de la connexion affine

• Pour faciliter les simplifications, il est ici utile de commencer par vérifier si la symétrie $\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}$ aussi est vraie en espace courbe.

En considérant le cas particulier du vecteur $A_\alpha = \partial_\alpha \varphi$ (gradient d'une fonction scalaire φ), on constate la symétrie : $\partial_\beta A_\alpha = \partial_\beta \partial_\alpha \varphi = \partial_\alpha \partial_\beta \varphi = \partial_\alpha A_\beta$. Il en découle : $D_\alpha A_\beta - D_\beta A_\alpha = \left(\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}\right) A_\gamma$.

• Dans un espace plat, on peut toujours se ramener à des coordonnées cartésiennes, pour lesquelles $D_\alpha A_\beta - D_\beta A_\alpha = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha = 0$ (et les symboles de Christoffel sont nuls). Donc, cette quantité étant un tenseur, elle est nulle aussi pour tout autre système de coordonnées ; ainsi la connexion affine est symétrique $\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}$.

Dans un espace courbe, on ne peut pas se ramener à des coordonnées cartésiennes ; or, la nullité d'un tenseur n'est alors pas “conservée” (ainsi le tenseur de courbure, étudié dans la suite, est nul dans un espace plat mais non dans un espace courbe). La connexion affine peut alors ne pas être symétrique.

La dissymétrie de la connexion affine peut être associée à une “torsion intrinsèque” en plus de la “courbure” (notion précisée dans la suite). On réserve ici la notation Γ (nommée “symbole de Christoffel”) pour une connexion affine symétrique (propriété requise pour respecter le principe d'équivalence, à la base de la relativité générale ; propriété précisée dans la suite).

◊ remarque : la notion mathématique de “connexion” peut largement se généraliser, pourvu qu'elle soit décrite par des coefficients ${\gamma^{\mu}}_{\nu\rho}$ vérifiant certaines règles élémentaires ; ici le transport parallèle est plus contraignant.

• Puisque les Γ sont nuls en coordonnées cartésiennes (dans un espace plat), mais généralement non nuls avec d'autres coordonnées (même dans un espace plat), ils ne se transforment pas comme des tenseurs.

Dans un changement de repère local $\underline{x}^{\beta} \to x^{\alpha}$ tel que : $dx^{\alpha} = \underline{\partial}_{\beta} x^{\alpha}\, d\underline{x}^{\beta}$ et $d\underline{x}^{\beta} = \partial_{\alpha} \underline{x}^{\beta}\, dx^{\alpha}$, on obtient : ${\Gamma^{\kappa}}_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\underline{x}^{\mu}\, \partial_{\beta}\underline{x}^{\nu}\, \underline{\partial}_{\rho} x^{\kappa}\, {\underline{\Gamma}^{\rho}}_{\mu\nu} + \partial_{\alpha\beta}\underline{x}^{\mu}\, \underline{\partial}_{\mu} x^{\kappa}$ et $\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = g_{\gamma\kappa}\, {\Gamma^{\kappa}}_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\underline{x}^{\mu}\, \partial_{\beta}\underline{x}^{\nu}\, \partial_{\gamma}\underline{x}^{\rho}\, \Gamma_{\rho\mu\nu} + \partial_{\alpha\beta}\underline{x}^{\mu}\, \partial_{\gamma}\underline{x}^{\nu}\, g_{\mu\nu}$.

• La propriété (tensorielle) : $D_{\gamma} g_{\alpha\beta} = \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = 0$, obtenue en espace plat, est valable de même en espace courbe. On retrouve donc par permutations (en utilisant la symétrie) l'expression de la connexion affine en fonction de la métrique :

$$\partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \ ; \ \partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} = \Gamma_{\gamma\beta\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma\alpha} \ ; \ \partial_{\beta} g_{\gamma\alpha} = \Gamma_{\alpha\gamma\beta} + \Gamma_{\gamma\alpha\beta} \ ;$$

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} g_{\alpha\gamma} - \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta}\right)$$; symboles de Christoffel.

◊ remarque : les expressions obtenues en espace plat pour la divergence, le laplacien et le produit vectoriel sont de même valables en espace courbe.

• Pour préciser la notion de transport parallèle, on peut alors établir l'équation des géodésiques, définis par : $\delta(\int ds) = 0$.

Afin de simplifier, il est pour cela utile de considérer :

$$\delta(ds^2) = \delta\left(g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta}\right) \ ;$$

$$2\, ds\, \delta(ds) = dx^{\alpha}\, dx^{\beta}\, \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta}\, \delta x^{\gamma} + 2\, g_{\alpha\gamma}\, dx^{\alpha}\, d(\delta x^{\gamma}) \ .$$

Ainsi, en notant $u^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{ds}$ (généralisation de la vitesse), les géodésiques sont donc tels que :

$$\int \left(\frac{1}{2} u^{\alpha}\, u^{\beta}\, \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta}\, \delta x^{\gamma} + g_{\alpha\gamma}\, u^{\alpha} \frac{d(\delta x^{\gamma})}{ds} \right) ds = 0 \ .$$

En intégrant par parties sur un chemin dont les extrémités sont fixes :

$$\int \left(\frac{1}{2} u^{\alpha}\, u^{\beta}\, \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta}\, \delta x^{\gamma} + \frac{d}{ds}\left(g_{\alpha\gamma}\, u^{\alpha}\right) \delta x^{\gamma} \right) ds = 0 \ .$$

Les variations étant quelconques :

$$\frac{1}{2} u^\alpha\, u^\beta\, \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \frac{d}{ds}\left(g_{\alpha\gamma}\, u^\alpha\right) = 0 \ \ ;$$
$$\frac{1}{2} u^\alpha\, u^\beta\, \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - u^\alpha\, u^\beta\, \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\gamma} \frac{du^\alpha}{ds} = 0 \ .$$

En remarquant que $\Gamma_{\gamma\alpha\beta}\, u^\alpha\, u^\beta = \left(\partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2}\partial_\gamma g_{\alpha\beta}\right) u^\alpha\, u^\beta$, ceci donne finalement la généralisation d'une accélération nulle :

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\, u^\mu\, u^\nu = \frac{Du^\alpha}{Ds} = 0 \ \ ;$$
$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\, \frac{dx^\mu}{ds}\, \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \ .$$

📖 *exercices n° IV, V, VI et VII.*

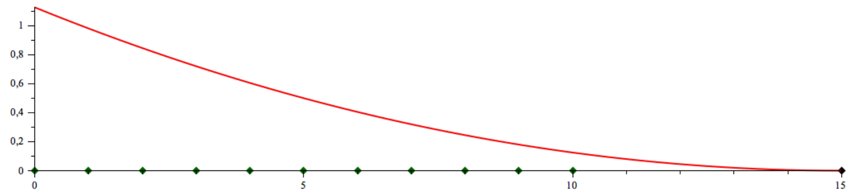
Annexe : notion de transport parallèle

• Pour essayer de comprendre la notion de transport parallèle, généralisant le déplacement “rectiligne”, on peut comparer à l'exemple d'une “pseudo-courbure” de l'espace (limitée aux effets d'optique) causée par la réfraction.

◊ remarque : l'expérience est classique, mais sa mise au point est délicate ; faute de temps, je me limite ici à une simulation informatique.

• On considère une cuve de faible épaisseur, contenant une solution inhomogène avec un gradient d'indice (par exemple un mélange d'eau et d'alcool).

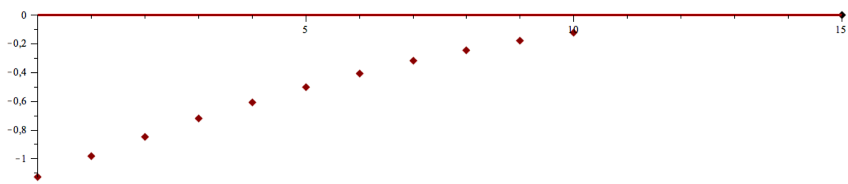
La cuve contient une règle horizontale (graduée de 0 à 10) ; on y envoie un faisceau lumineux (dévié par réfraction) de telle façon qu'il arrive horizontalement à l'abscisse $x = 15$.



◊ remarque : pour “voir” le faisceau de côté, il faut que le liquide contienne un peu de particules diffusantes (chaque point du faisceau diffuse un peu de lumière sur les côtés).

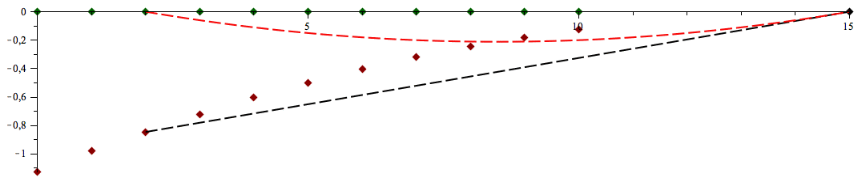
◊ remarque : de côté, la déviation par le milieu donne de cet ensemble une vision légèrement décalée mais peu déformée (la cuve est étroite).

• Par contre, si on observe le faisceau “dans l'alignement”, on le voit rectiligne... et on voit au contraire la graduation courbée (ici, pour faciliter la comparaison, la simulation montre “de côté” la position apparente de ce qui est observé “dans l'alignement”).



◊ remarque : on voit le faisceau rectiligne non seulement car l'œil perçoit surtout la direction d'arrivée (horizontale), mais aussi parce que la lumière diffusée le long du faisceau et arrivant dans l'œil suit forcément le même trajet, donc arrive dans la même direction.

◊ remarque : le schéma suivant précise le trajet d'un rayon lumineux.



• Ceci peut aider à comprendre que ce qui est perçu “dans” un espace courbe ne correspond généralement pas à l'impression qu'on peut avoir lorsqu'on raisonne en regardant “de l'extérieur” une représentation de cet espace par un sous-espace d'un espace plat.

Ainsi pour la surface d'une sphère, lorsqu'on fait varier θ, la modification de $\overrightarrow{u_\theta}$ (vecteur du plan tangent) semble ne pas se faire “parallèlement”. Il s'agit pourtant d'un “transport parallèle”, car le vecteur reste parallèle au méridien, qui est un géodésique : “dans” la surface, le géodésique est perçu “comme une ligne droite”. C'est d'ailleurs en constatant l'impossibilité de tracer de telles “droites” parallèles que les habitants de la sphère peuvent conclure que leur espace est courbe.