GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE EN ESPACE COURBE - corrigé des exercices

I. Dérivation covariante

1. • Dans un changement de coordonnées $(\underline{x}^\alpha \to x^\beta)$ la transformation correspond à un tenseur :
$$A_\mu = \partial_\mu \underline{x}^\alpha \, A_\alpha \quad ; \quad B^\nu = \underline{\partial_\beta} x^\nu \, \underline{B}^\beta \quad ; \quad C^\rho = \underline{\partial_\gamma} x^\rho \, \underline{C}^\gamma \quad ; \quad A_\mu \, B^\nu \, C^\rho = \partial_\mu \underline{x}^\alpha \, \underline{\partial_\beta} x^\nu \, \underline{\partial_\gamma} x^\rho \, A_\alpha \, \underline{B}^\beta \, \underline{C}^\gamma \ .$$

2.a. • La variation $\delta\big(A_\mu \, B^\nu \, C^\rho\big) = B^\nu \, C^\rho \, \delta\big(A_\mu\big) + A_\mu \, C^\rho \, \delta(B^\nu) + A_\mu \, B^\nu \, \delta(C^\rho)$ se déduit de celles des vecteurs : $\delta\big(A_\mu \, B^\nu \, C^\rho\big) = B^\nu \, C^\rho \, \Gamma^\beta{}_{\mu\gamma} \, A_\beta \, dx^\gamma - A_\mu \, C^\rho \, \Gamma^\nu{}_{\beta\gamma} \, B^\beta \, dx^\gamma - A_\mu \, B^\nu \, \Gamma^\rho{}_{\beta\gamma} \, C^\beta \, dx^\gamma$.

2.b. • La variation étant linéaire, elle se généralise à tout tenseur $A_\mu{}^{\nu\rho}$:
$$\delta A_\mu{}^{\nu\rho} = A_\beta{}^{\nu\rho} \, \Gamma^\beta{}_{\mu\gamma} \, dx^\gamma - A_\mu{}^{\beta\rho} \, \Gamma^\nu{}_{\beta\gamma} \, dx^\gamma - A_\mu{}^{\nu\beta} \, \Gamma^\rho{}_{\beta\gamma} \, dx^\gamma \ .$$

3. • On obtient ainsi : $DA_\mu{}^{\nu\rho} = dA_\mu{}^{\nu\rho} - \delta A_\mu{}^{\nu\rho} = dA_\mu{}^{\nu\rho} + \Gamma^\beta{}_{\mu\gamma} \, A_\beta{}^{\nu\rho} \, dx^\gamma - \Gamma^\nu{}_{\beta\gamma} \, A_\mu{}^{\beta\rho} \, dx^\gamma - \Gamma^\rho{}_{\beta\gamma} \, A_\mu{}^{\nu\beta} \, dx^\gamma$.
• On en déduit les “dérivées covariantes” : $D_\alpha A_\mu{}^{\nu\rho} = \partial_\alpha A_\mu{}^{\nu\rho} + \Gamma^\beta{}_{\mu\alpha} \, A_\beta{}^{\nu\rho} - \Gamma^\nu{}_{\beta\alpha} \, A_\mu{}^{\beta\rho} - \Gamma^\rho{}_{\beta\alpha} \, A_\mu{}^{\nu\beta}$.
◊ remarque : le principe se généralise à tout tenseur, quel que soit le nombre d'indices covariants et/ou contravariants.

II. Transport parallèle

1. • Dans $\mathbb{R}^3$ on peut considérer $ds^2 = c^2 \, dt^2 - d\ell^2$ avec $d\ell^2 = R^2 \, d\theta^2 + dz^2 = d\xi^2 + dz^2$.
• Ceci correspond à : $g_{00} = 1$; $g_{11} = -1$; $g_{22} = -1$.
• Cette métrique est celle correspondant à des coordonnées cartésiennes dans un plan, mais la surface est par ailleurs “cyclique” sur la variable ξ (provenant de θ).
◊ remarque : en pratique, dans $\mathbb{R}^3$, un cylindre découpé selon une droite parallèle à son axe peut être déroulé et superposé à une bande d'un plan.

2.a. • En déplaçant $\vec{u}_r(M_1)$ parallèlement à lui même au sens de $\mathbb{R}^3$, on obtient $-\vec{u}_\theta(M_2)$.
• En déplaçant $\vec{u}_\theta(M_1)$ parallèlement à lui même au sens de $\mathbb{R}^3$, on obtient $\vec{u}_r(M_2)$.

2.b. • Le vecteur $\vec{u}_r$ n'existe pas en tant que vecteur de la surface (il n'est pas dans le plan tangent).
• Perpendiculaire en chaque point à l'axe Oz , le cercle est l'équivalent d'un axe cartésien $O\xi$ (il s'agit d'une géodésique).
• Le “transport parallèle” au sens de la surface est donc en fait parallèle à cet axe : on obtient $\vec{u}_\theta(M_2)$, ce qui est cohérent pour un espace localement plat.

III. Somme de vecteurs

1. • Dans un espace courbe, le transport parallèle de $\vec{B}$ en M dépend du chemin suivi, donc de façon générale ceci n'est éventuellement possible que pour la limite de points quasi-confondus (séparés par une distance infinitésimale).

2. • En supposant qu'on puisse définir une méthode de transport parallèle telle que $\vec{B}_M$ ne soit pas ambigu, alors on pourrait définir en M une somme $\vec{A}_M + \vec{B}_M$. Mais par ailleurs, on pourrait alors aussi, par la même méthode, définir $\vec{A}_N$, puis $\vec{A}_N + \vec{B}_N$; le problème est qu'un transport inverse donnerait en général : $\big(\vec{A}_N + \vec{B}_N\big)_M \neq \big(\vec{A}_M + \vec{B}_M\big)_N$. Ainsi, pour des grandeurs définies en des points distincts, on ne peut considérer que des sommes de scalaires.

IV. Transformation de la Connexion affine

• À partir de $\underline{DA}^{\alpha} = d\underline{A}^{\alpha} + \underline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\, \underline{A}^{\beta}\, d\underline{x}^{\gamma}$, on obtient :

$$\partial_{\beta}\underline{x}^{\alpha}\, DA^{\beta} = d\big(\partial_{\rho}\underline{x}^{\alpha}\, A^{\rho}\big) + \underline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\, \partial_{\rho}\underline{x}^{\beta}\, A^{\rho}\, \partial_{\mu}\underline{x}^{\gamma}\, dx^{\mu} \ ;$$

$$\partial_{\beta}\underline{x}^{\alpha}\, DA^{\beta} = \partial_{\rho}\underline{x}^{\alpha}\, dA^{\rho} + d\big(\partial_{\rho}\underline{x}^{\alpha}\big)\, A^{\rho} + \underline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\, \partial_{\rho}\underline{x}^{\beta}\, A^{\rho}\, \partial_{\mu}\underline{x}^{\gamma}\, dx^{\mu} \ ;$$

$$\partial_{\beta}\underline{x}^{\alpha}\, DA^{\beta} = \partial_{\rho}\underline{x}^{\alpha}\, dA^{\rho} + \partial_{\rho\mu}\underline{x}^{\alpha}\, dx^{\mu}\, A^{\rho} + \underline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\, \partial_{\rho}\underline{x}^{\beta}\, A^{\rho}\, \partial_{\mu}\underline{x}^{\gamma}\, dx^{\mu} \ .$$

• En appliquant la transformation inverse :

$$DA^{\sigma} = \underline{\partial}_{\alpha}x^{\sigma}\, \partial_{\beta}\underline{x}^{\alpha}\, DA^{\beta} = \delta^{\sigma}_{\beta}\, DA^{\beta} \ ;$$

$$DA^{\sigma} = \underline{\partial}_{\alpha}x^{\sigma}\, \underline{DA}^{\alpha} = \underline{\partial}_{\alpha}x^{\sigma}\, \big(\partial_{\rho}\underline{x}^{\alpha}\, dA^{\rho} + \partial_{\rho\mu}\underline{x}^{\alpha}\, dx^{\mu}\, A^{\rho} + \underline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\, \partial_{\rho}\underline{x}^{\beta}\, A^{\rho}\, \partial_{\mu}\underline{x}^{\gamma}\, dx^{\mu}\big) \ ;$$

$$DA^{\sigma} = dA^{\sigma} + \big(\underline{\partial}_{\alpha}x^{\sigma}\, \partial_{\rho}\underline{x}^{\beta}\, \partial_{\mu}\underline{x}^{\gamma}\, \underline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + \underline{\partial}_{\alpha}x^{\sigma}\, \partial_{\rho\mu}\underline{x}^{\alpha}\big)\, A^{\rho}\, dx^{\mu} \ .$$

• La comparaison avec $DA^{\sigma} = dA^{\sigma} + \Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu}\, A^{\rho}\, dx^{\mu}$ donne $\Gamma^{\sigma}{}_{\rho\mu} = \underline{\partial}_{\alpha}x^{\sigma}\, \partial_{\rho}\underline{x}^{\beta}\, \partial_{\mu}\underline{x}^{\gamma}\, \underline{\Gamma}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + \underline{\partial}_{\alpha}x^{\sigma}\, \partial_{\rho\mu}\underline{x}^{\alpha}$, ou par changement des indices : $\Gamma^{\kappa}{}_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\underline{x}^{\mu}\, \partial_{\beta}\underline{x}^{\nu}\, \underline{\partial}_{\rho}x^{\kappa}\, \underline{\Gamma}^{\rho}{}_{\mu\nu} + \partial_{\alpha\beta}\underline{x}^{\mu}\, \underline{\partial}_{\mu}x^{\kappa}$.

V. Sous-espace courbe

1.a. • Chaque point de la demi-sphère a une projection et une seule (on se limite à $z > 0$) ; ce repérage donne une représentation sans ambiguïté.

1.b. • Ces coordonnées ne sont pas cartésiennes en tant que coordonnées sur la demi-sphère, car elles ne correspondent pas à des “axes” rectilignes.

2.a. • Dans $\mathbb{R}^3$ on peut utiliser $ds^2 = c^2\, dt^2 - d\ell^2$ avec $d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$; le sous-espace considéré impose : $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0 = 2\,x\,dx + 2\,y\,dy + 2\,z\,dz$, donc : $dz^2 = \frac{x^2\, dx^2 + 2\,x\,y\,dx\,dy + y^2\, dy^2}{R^2 - x^2 - y^2}$.

• On en déduit par substitution : $d\ell^2 = \frac{R^2 - y^2}{R^2 - x^2 - y^2}\, dx^2 + \frac{2\,x\,y}{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy + \frac{R^2 - x^2}{R^2 - x^2 - y^2}\, dy^2$.

• Ceci correspond à : $g_{00} = 1$; $g_{11} = -\frac{R^2 - y^2}{R^2 - x^2 - y^2}$; $g_{22} = -\frac{R^2 - x^2}{R^2 - x^2 - y^2}$;
$g_{12} = g_{21} = -\frac{x\,y}{R^2 - x^2 - y^2}$ (sans oublier qu'il y a deux termes égaux).

2.b. • Le déterminant est $g = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$; la matrice inverse $g^{\alpha\beta}$ correspond à :

$$g^{00} = 1 \ ; \ g^{11} = -\frac{R^2 - x^2}{R^2} \ ; \ g^{22} = -\frac{R^2 - y^2}{R^2} \ ; \ g^{12} = g^{21} = \frac{x\,y}{R^2} \ .$$

3.a. • On obtient ainsi :

$$\Gamma_{111} = -\frac{x.(R^2 - y^2)}{(R^2 - x^2 - y^2)^2} \ ; \ \Gamma_{222} = -\frac{y.(R^2 - x^2)}{(R^2 - x^2 - y^2)^2} \ ;$$

$$\Gamma_{211} = -\frac{y.(R^2 - y^2)}{(R^2 - x^2 - y^2)^2} \ ; \ \Gamma_{122} = -\frac{x.(R^2 - x^2)}{(R^2 - x^2 - y^2)^2} \ ;$$

$$\Gamma_{112} = \Gamma_{121} = -\frac{y\,x^2}{(R^2 - x^2 - y^2)^2} \ ; \ \Gamma_{221} = \Gamma_{212} = -\frac{x\,y^2}{(R^2 - x^2 - y^2)^2} \ .$$

3.b. • On obtient enfin :

$$\Gamma^1{}_{11} = \Gamma_{111}\, g^{11} + \Gamma_{211}\, g^{22} = \frac{x.(R^2 - y^2)}{R^2.(R^2 - x^2 - y^2)} \ ; \ \Gamma^2{}_{22} = \frac{y.(R^2 - x^2)}{R^2.(R^2 - x^2 - y^2)} \ ;$$

$$\Gamma^2{}_{11} = \frac{y.(R^2 - y^2)}{R^2.(R^2 - x^2 - y^2)} \ ; \ \Gamma^1{}_{22} = \frac{x.(R^2 - x^2)}{R^2.(R^2 - x^2 - y^2)} \ ;$$

$$\Gamma^1{}_{12} = \Gamma^1{}_{21} = \frac{y\,x^2}{R^2.(R^2 - x^2 - y^2)} \ ; \ \Gamma^2{}_{21} = \Gamma^2{}_{12} = \frac{x\,y^2}{R^2.(R^2 - x^2 - y^2)} \ .$$

VI. Sous-espace courbe

1.a. • On peut considérer $ds^2 = c^2\, dt^2 - d\ell^2$ avec $d\ell^2 = r^2\, d\theta^2 + R^2\, \sin^2(\theta)\, d\varphi^2$.
• Ceci correspond à : $g_{00} = 1$; $g_{11} = -R^2$; $g_{22} = -R^2 \sin^2(\theta)$.

1.b. • Le déterminant est $g = R^4 \sin^2(\theta)$; la matrice inverse $g^{\alpha\beta}$ correspond à :
$g^{00} = 1$; $g^{11} = -\frac{1}{R^2}$; $g^{22} = -\frac{1}{R^2 \sin^2(\theta)}$.

2.a. • On obtient ainsi : $\Gamma_{212} = \Gamma_{221} = -\Gamma_{122} = -R^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$.

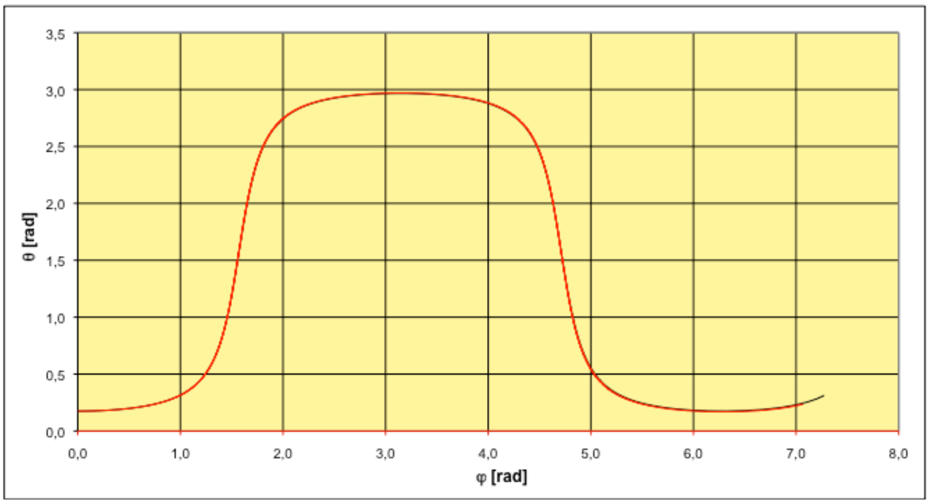
2.b. • On obtient enfin : ${\Gamma^2}_{12} = {\Gamma^2}_{21} = \Gamma_{212}\, g^{22} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$; ${\Gamma^1}_{22} = -\sin(\theta)\cos(\theta)$.

3.a. • Les coordonnées cartésiennes peuvent s'écrire (avec un indice (0) pour les valeurs en M_0) :
$x_{(0)} = R\ \sin(\theta_0)\cos(\varphi_0)$; $y_{(0)} = R\ \sin(\theta_0)\sin(\varphi_0)$; $z_{(0)} = R\ \cos(\theta_0)$.
• L'équation du plan considéré peut s'écrire sous la fome :
$0 = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM_0} = x\, R \sin(\theta_0)\cos(\varphi_0) + y\, R \sin(\theta_0)\sin(\varphi_0) + z\, R\cos(\theta_0)$.

3.b. • De façon analogue : $x = R\ \sin(\theta)\cos(\varphi)$; $y = R\ \sin(\theta)\sin(\varphi)$; $z = R\ \cos(\theta)$.
• L'équation d'un grand cercle peut donc s'écrire :
$\sin(\theta)\sin(\theta_0)\cos(\varphi)\cos(\varphi_0) + \sin(\theta)\sin(\theta_0)\sin(\varphi)\sin(\varphi_0) + \cos(\theta)\cos(\theta_0) = 0$.
• Ceci peut se simplifier sous la forme : $\cos(\varphi - \varphi_0) + \cot(\theta)\cot(\theta_0) = 0$.

4.a. • L'équation temporelle des géodésiques s'écrit $\frac{d^2t}{ds^2} = 0$. Ceci implique la proportionnalité $ds \propto dt$; il en découle donc aussi $d\ell \propto dt$ (correspondant à un déplacement à vitesse constante).
• Les équations des géodésiques de la surface correspondent ainsi à :
$\frac{d^2\theta}{d\ell^2} - \sin(\theta)\cos(\theta)\left(\frac{d\varphi}{d\ell}\right)^2 = 0$; $\frac{d^2\varphi}{d\ell^2} + 2\,\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\,\frac{d\theta}{d\ell}\,\frac{d\varphi}{d\ell} = 0$.

4.b. • Si on pose $F = \frac{d\varphi}{d\ell}$, la seconde équation peut s'écrire : $\frac{dF}{d\theta} + 2\,\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\, F = 0$; les solutions sont de la forme : $F(\theta) = \frac{Cte}{\sin^2(\theta)}$ (on peut trouver une intégrale première équivalente avec la première équation), mais la seconde intégration est très ardue ; on se limite donc ici à une intégration numérique.
• La méthode d'Euler donne une courbe indiscernable de celle obtenue à la question (3).



VII. Sous-espace courbe

1.a. • Dans $\mathbb{R}^3$ on peut considérer $ds^2 = c^2\, dt^2 - d\ell^2$ avec :
$d\ell^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + dz^2 = dr^2 + (1 + \lambda^2\, r^2)\, dz^2$.
• Ceci correspond à : $g_{00} = 1$; $g_{11} = -1$; $g_{22} = -(1 + \lambda^2\, r^2)$.

1.b. • Le déterminant est $g = 1 + \lambda^2\, r^2$; la matrice inverse $g^{\alpha\beta}$ correspond à :
$g^{00} = 1$; $g^{11} = -1$; $g^{22} = -\frac{1}{1+\lambda^2\, r^2}$.

2.a. • On obtient ainsi : $\Gamma_{212} = \Gamma_{221} = -\Gamma_{122} = -\lambda^2\, r$.

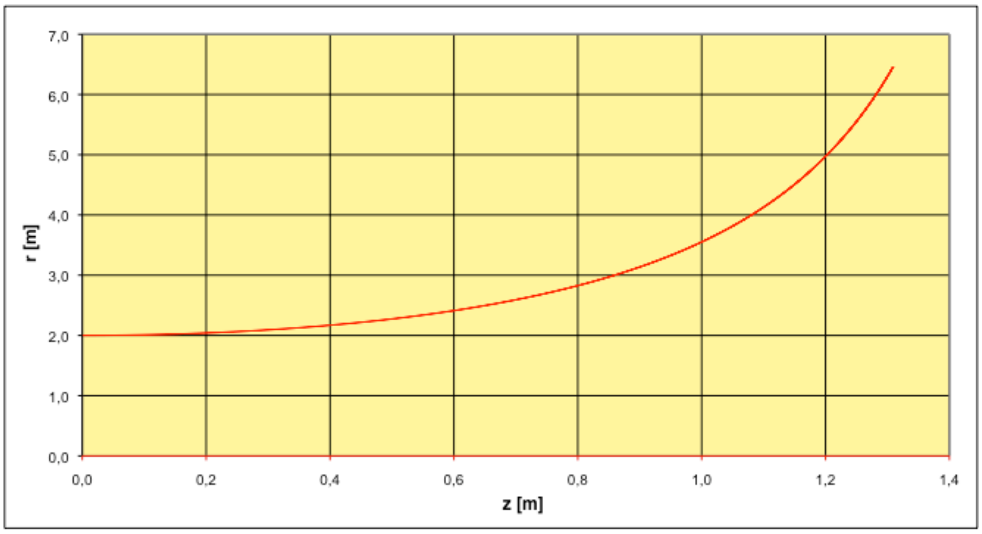
2.b. • On obtient enfin : ${\Gamma^2}_{12} = {\Gamma^2}_{21} = \Gamma_{212}\, g^{22} = \frac{\lambda^2\, r}{1+\lambda^2\, r^2}$; ${\Gamma^1}_{22} = -\lambda^2\, r$.

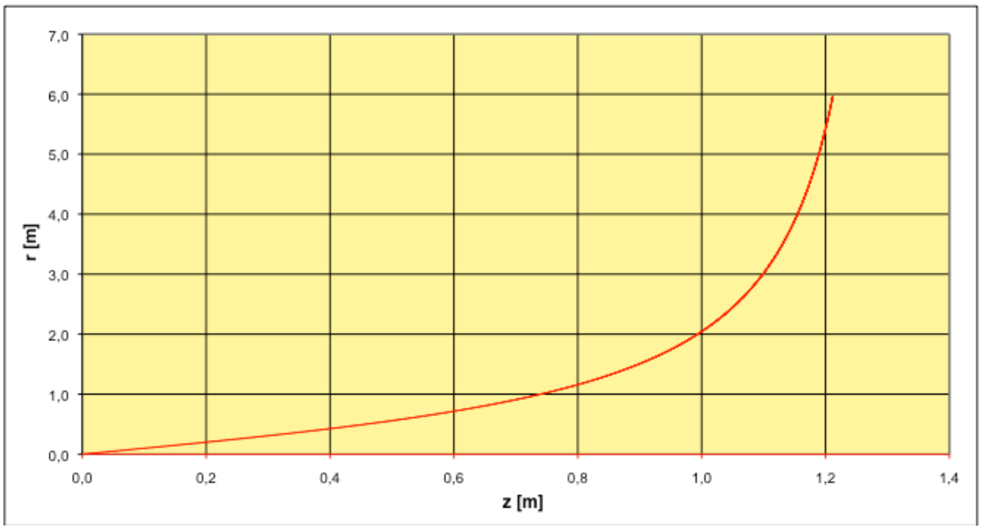
3.a. • Dans $\mathbb{R}^3$ on peut utiliser $ds^2 = c^2\, dt^2 - d\ell^2$ avec $d\ell^2 = dr^2 + dz^2 + \lambda^2\, r^2\, d\zeta^2$.
• On peut alors considérer $r = r(z)$ et regrouper : $d\rho^2 = dr^2 + dz^2 = dz^2.\left(1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right)$.
• Pour retrouver une métrique équivalente (avec notations adaptées) : $d\ell^2 = d\rho^2 + (1 + \lambda^2\, \rho^2)\, d\zeta^2$, il faut et il suffit donc que : $r^2 = R^2.(1 + \lambda^2\, r^2)$, c'est à dire : $\rho = \sqrt{r^2 - R^2}$.
• Ceci correspond à : $d\rho^2 = dr^2 + dz^2 = \frac{\lambda^2\, \rho^2}{1+\lambda^2\, \rho^2}\, d\rho^2 + dz^2$; $\frac{1}{1+\lambda^2\, \rho^2}\, d\rho^2 = dz^2$. On en déduit par intégration (en choisissant $\rho = 0$ pour $z = 0$) : $\rho = R\, \sinh(\lambda\, z)$; $r = R\, \cosh(\lambda\, z)$.
• La surface ainsi définie est “localement équivalente” puisqu'elle a la même métrique. Elle n'est pas globalement équivalente car elle est par ailleurs “cyclique” sur la variable ζ (provenant de θ) ; la situation est analogue au cas d'un cylindre, “localement plat” mais non plan.

3.b. • La première formulation peut suggérer une torsion (avec un sens de vissage arbitraire parmi deux possibles). La seconde formulation montre par contre qu'il n'y a pas de torsion intrinsèque.
• L'ambiguïté vient du fait qu'il y a une sorte de “torsion” dans $\mathbb{R}^3$, mais que ce n'est pas une propriété intrinsèque de la surface : c'est une propriété de la façon dont elle est modélisée dans $\mathbb{R}^3$. On peut obtenir une autre modélisation dans $\mathbb{R}^3$, localement équivalente (à par le fait qu'elle est cyclique sur ζ), mais sans aspect de “torsion”.
• La “torsion intrinsèque” d'une surface est associée à la non commutation des dérivées covariantes.

4.a. • L'équation temporelle des géodésiques s'écrit $\frac{d^2t}{ds^2} = 0$. Ceci implique la proportionnalité $ds \propto dt$; il en découle donc aussi $d\ell \propto dt$ (correspondant à un déplacement à vitesse constante).
• Les équations des géodésiques de la surface correspondent ainsi à :
$\frac{d^2r}{d\ell^2} - \lambda^2\, r\,.\left(\frac{dz}{d\ell}\right)^2 = 0$; $\frac{d^2z}{d\ell^2} + 2\, \frac{\lambda^2\, r}{1+\lambda^2\, r^2}\, \frac{dr}{d\ell}\, \frac{dz}{d\ell} = 0$.

4.b. • Si on pose $Z = \frac{dz}{d\ell}$, la seconde équation peut s'écrire : $\frac{dZ}{dr} + 2\, \frac{\lambda^2\, r}{1+\lambda^2\, r^2}\, Z = 0$; les solutions sont de la forme : $Z(r) = \frac{Cte}{1+\lambda^2\, r^2}$ (on peut trouver une intégrale première équivalente avec la première équation), mais la seconde intégration est très ardue ; on se limite donc ici à une intégration numérique.
• La méthode d'Euler donne des courbes très vraisemblables pourvu que le pas de calcul soit assez petit. Il y a deux types de géodésiques, selon qu'ils coupent ou non l'axe Oz .


7,0
6,0
5,0
4,0
3,0
2,0
1,0
0,0
r [m]
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
z [m]


7,0
6,0
5,0
4,0
3,0
2,0
1,0
0,0
r [m]
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
z [m]