GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE EN ESPACE COURBE - exercices

I. Dérivation covariante

1. • On considère un produit direct de vecteurs : $A_\mu \, B^\nu \, C^\rho$ (exprimés indifféremment par leurs coordonnées covariantes ou contravariantes) ; justifier que cet objet est un tenseur.

2. a) Dans des conditions de transport parallèle des vecteurs, calculer la variation $\delta\left(A_\mu \, B^\nu \, C^\rho\right)$ due à la variation des coordonnées locales.
   b) Justifier que cette propriété se généralise à un tenseur ${A_\mu}^{\nu\rho}$ quelconque.

3. • En déduire les “dérivées covariantes” pour un tenseur ${A_\mu}^{\nu\rho}$.

II. Transport parallèle

1. • On considère dans $\mathbb{R}^3$ un cylindre d'axe Oz et de rayon R (en coordonnées cylindriques). On utilise pour cela (en plus de $x^0 = c\,t$), le repérage par les coordonnées : $x^1 = \xi = R\,\theta$ et $x^2 = z$.
   • Justifier que cela correspond à des coordonnées “cartésiennes” et que (bien que “cyclique”) la surface est “localement équivalente” au plan.

2. • Un point M se déplace sur le cylindre, le long d'un cercle perpendiculaire à l'axe, d'un quart de tour dans le sens de θ croissant (d'une position M_1 à une position M_2).
   a) Que donne le “transport parallèle” des vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ au sens de $\mathbb{R}^3$?
   b) Que donne le “transport parallèle” des vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ au sens de la surface du cylindre ?

III. Somme de vecteurs

1. • Dans un espace courbe, on cherche à définir la somme de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ respectivement définis en deux points M et N distincts.
   • Est-il possible de définir une telle somme au point M, par transport parallèle de $\vec{B}$ en M ?

2. • En supposant qu'on puisse définir une méthode particulière de transport parallèle qui permette de définir une somme au point M, le résultat obtenu serait-il en pratique utilisable ?

IV. Transformation de la Connexion affine

• On considère un changement de repère $\underline{x}^\beta \to x^\alpha$ tel que : $dx^\alpha = \underline{\partial}_\beta x^\alpha \, d\underline{x}^\beta$ et $d\underline{x}^\beta = \partial_\alpha \underline{x}^\beta \, dx^\alpha$.

• À partir de $DA^\alpha = dA^\alpha + {\Gamma^\alpha}_{\beta\gamma} \, A^\beta \, dx^\gamma$ et $\underline{DA}^\alpha = d\underline{A}^\alpha + {\underline{\Gamma}^\alpha}_{\beta\gamma} \, \underline{A}^\beta \, d\underline{x}^\gamma$, montrer qu'on obtient :

$$ {\Gamma^\kappa}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \underline{x}^\mu \, \partial_\beta \underline{x}^\nu \, \underline{\partial}_\rho x^\kappa \, {\underline{\Gamma}^\rho}_{\mu\nu} + \partial_{\alpha\beta} \underline{x}^\mu \, \underline{\partial}_\mu x^\kappa \, . $$

V. Sous-espace courbe

1. • On se propose d'étudier l'espace courbe que constitue la demi-sphère décrite en coordonnée cartésiennes par $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ avec $z > 0$; il s'agit d'un sous-espace courbe dans un espace plat.
   a) Justifier que (en plus de $x^0 = c\,t$), le repérage par les coordonnées en projection : $x^1 = x$ et $x^2 = y$ donne une bonne représentation acceptable sur la demi-sphère.
   b) Ces coordonnées sont-elles des coordonnées cartésiennes ?

2. a) Établir l'expression de ds^2 et de $g_{\alpha\beta}$.
   b) En déduire $g^{\alpha\beta}$.

3. a) Établir l'expression des $\Gamma_{\kappa\alpha\beta}$.
b) En déduire les $\Gamma^{\kappa}{}_{\alpha\beta}$.

VI. Sous-espace courbe

1. • On se propose d'étudier l'espace courbe que constitue la sphère décrite en coordonnée sphériques par $r = R$ (constant) ; il s'agit d'un sous-espace courbe dans un espace plat.
• On choisit le repérage par les coordonnées : $x^1 = \theta$ et $x^2 = \varphi$ (en plus de $x^0 = c\,t$).
a) Établir l'expression de ds^2 et de $g_{\alpha\beta}$.
b) En déduire $g^{\alpha\beta}$.

2. a) Établir l'expression des $\Gamma_{\kappa\alpha\beta}$.
b) En déduire les $\Gamma^{\kappa}{}_{\alpha\beta}$.

3. • En raisonnant dans $\mathbb{R}^3$, on peut montrer que les géodésiques de la sphère sont des “grands cercles” (déduits de l'équateur et/ou des méridiens par inclinaison). On se propose de trouver l'équation de ces géodésiques par géométrie analytique dans $\mathbb{R}^3$.
a) Exprimer les coordonnées cartésiennes d'un point M_0 $(R\,,\ \theta_0\,,\ \varphi_0\,)$ sur la sphère ; en déduire l'équation cartésienne du plan perpendiculaire à OM_0 et passant par l'origine.
b) Exprimer les coordonnées cartésiennes d'un point M $(R,\ \theta,\ \varphi)$ de la sphère ; en déduire l'équation d'un grand cercle en coordonnées sphériques (intersection de la sphère avec le plan considéré à la question précédente).

4. a) Écrire les équations différentielles des géodésiques de la surface.
b) Ces équations différentielles ne sont pas faciles à intégrer littéralement (même quand on connaît à l'avance la solution, ici donnée par la question 3.b). Les intégrer numériquement par la méthode d'Euler et comparer aux expressions littérales obtenues précédemment.

VII. Sous-espace courbe

1. • On veut étudier l'espace courbe que constitue la surface “en hélice” décrite en coordonnée cylindriques par $\theta = \lambda\,z$ (où λ est une constante) avec $r \in \mathbb{R}$ (pour éviter l'existence d'un bord pour $r = 0$) ; il s'agit d'un sous-espace courbe dans un espace plat.
• On choisit le repérage par les coordonnées : $x^1 = r$ et $x^2 = z$ (en plus de $x^0 = c\,t$).
a) Établir l'expression de ds^2 et de $g_{\alpha\beta}$.
b) En déduire $g^{\alpha\beta}$.

2. a) Établir l'expression des $\Gamma_{\kappa\alpha\beta}$.
b) En déduire les $\Gamma^{\kappa}{}_{\alpha\beta}$.

3. a) Montrer qu'on peut trouver une surface “localement équivalente” (et en plus “cyclique”) en considérant le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ défini en coordonnées cylindriques par $r = R\,\sinh(\lambda\,z)$ avec $R = \frac{1}{\lambda}$. Utiliser pour cela (en plus de $x^0 = c\,t$) : $x^1 = \rho = \sqrt{r^2 - R^2}$ et $x^2 = \zeta = R\,\theta$.
b) Ces surfaces ont elles une “torsion” ?

4. a) Écrire les équations différentielles des géodésiques de la surface.
b) Ces équations différentielles ne sont pas faciles à intégrer littéralement. Les intégrer numériquement par la méthode d'Euler.