RG I - GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE EN ESPACE PLAT

1. Introduction

• Dans la théorie newtonienne, le champ de gravitation est créé par les masses ; or, la relativité met en évidence une équivalence masse-énergie $E = m\, c^2$, donc une théorie relativiste doit considérer que l'énergie du champ de gravitation contribue à la propre création de ce dernier... c'est à dire que la théorie est forcément non linéaire.

Comme cela est progressivement décrit dans la suite, la relativité générale considère que le champ de gravitation est associé à une “courbure” de l'espace-temps ; pour décrire précisément cela, l'usage de notations riemanniennes des coordonnées est en pratique indispensable. On commence ici par en aborder l'étude dans un espace “plat” (sans courbure).

2. Métrique locale

☞ remarque : la méthode envisagée dans ce chapitre n'est pas la plus générale ; elle est pour cette raison généralement “évitée” par les ouvrages traitant de ce sujet ; elle est au contraire abordée ici pour ses qualités en tant que “transition” dans la compréhension de l'usage des coordonnées.

◊ remarque : on adopte la convention de sommation d’Einstein ; tout indice répété en haut et en bas sous-entend une sommation : $x_i\, a^i \overset{\text{def}}{=} \sum_i\, (x_i\, a^i\,)$.

• Avec des coordonnées “quelconques”, par exemple polaires dans le plan, on peut définir une base locale $\vec{e}_i = \partial_i \vec{M}$; un déplacement de M en M' tel que $\overrightarrow{OM}' = \overrightarrow{OM} + d\vec{M}$ correspond à : $d\vec{M} = \partial_i \vec{M}\, dx^i = \vec{e}_i\, dx^i$.

◊ remarque : on peut noter $d\overrightarrow{OM}$ et $\partial_i \overrightarrow{OM}$ pour exprimer les variations du “vecteur position” $\overrightarrow{OM}$, mais ces quantités ne dépendent pas de l'origine fixe O du repère ; or, c'est un des problèmes de la généralisation ultérieure (si on considère la géométrie à la surface d'une sphère en prenant l'origine O au centre de la sphère, ce point n'est pas dans l'espace considéré).

• Les $\vec{e}_i$ ne sont généralement pas unitaires ; ils correspondent aux “déplacements” élémentaires $\partial_i\vec{M}$ associés aux coordonnées. Ainsi, pour les coordonnées polaires dans le plan : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r(\theta)$ correspond à $\vec{e}_1 = \partial_1\vec{M} = \vec{u}_r$ mais $\vec{e}_2 = \partial_2\vec{M} = r\,\vec{u}_\theta$.

• On peut alors définir un “élément de longueur” ds à l'aide de la relation : $ds^2 = d\vec{M}\cdot d\vec{M} = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ correspondant à : $g_{ij} = \partial_i\vec{M}\cdot\partial_j\vec{M} = \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$. Ainsi, pour les coordonnées polaires dans le plan : $ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2$.

• En un point voisin $\vec{M}' = \vec{M} + d\vec{M}$, le repère devient $\vec{e}_i{}' = \vec{e}_i + d\vec{e}_i$; on exprime alors les $d\vec{e}_i$ dans la base des $\vec{e}_i$. Les coefficients étant linéaires en dx^j, on peut donc écrire : $d\vec{e}_i = \Gamma^k{}_{ij}\,dx^j\,\vec{e}_k$.

• D’après $d\vec{e}_i = \partial_k\vec{e}_i\,dx^k$, la relation précédente donne : $\Gamma^k{}_{ij}\,\partial_k\vec{M} = \partial_{ij}\vec{M}$; les $\Gamma^k{}_{ij}$ sont les “composantes contravariantes” des dérivées secondes $\partial_{ij}\vec{M}$ dans la base locale des $\partial_k\vec{M}$.

Ainsi, pour les coordonnées polaires dans le plan :

$\partial_1\vec{e}_1 = \vec{0}$ donc $\Gamma^1{}_{11} = \Gamma^2{}_{11} = 0$;
$\partial_1\vec{e}_2 = \vec{u}_\theta = \frac{1}{r}\,\vec{e}_2$ donc $\Gamma^1{}_{12} = 0$ et $\Gamma^2{}_{12} = \frac{1}{r}$;
$\partial_2\vec{e}_1 = \vec{u}_\theta = \frac{1}{r}\,\vec{e}_2$ donc $\Gamma^1{}_{21} = 0$ et $\Gamma^2{}_{21} = \frac{1}{r}$;
$\partial_2\vec{e}_2 = -r\,\vec{u}_r = -r\,\vec{e}_1$ donc $\Gamma^1{}_{22} = -r$ et $\Gamma^2{}_{22} = 0$.

◊ remarque : on constate la symétrie par rapport aux deux derniers indices.

• Par ailleurs : $\Gamma^k{}_{ij}\,\vec{e}_k = \partial_j\vec{e}_i$ d’où on déduit : $\Gamma^k{}_{ij}\,\vec{e}_k\cdot\vec{e}_\ell = \Gamma^k{}_{ij}\,g_{k\ell} = \Gamma_{\ell ij}$; c'est-à-dire que les $\Gamma_{\ell ij} = \partial_j\vec{e}_i\cdot\vec{e}_\ell = \partial_{ij}\vec{M}\cdot\partial_\ell\vec{M}$ sont les “composantes covariantes” des dérivées secondes $\partial_{ij}\vec{M}$ dans la base locale des $\partial_\ell\vec{M}$.

Ainsi, pour les coordonnées polaires dans le plan :

$\partial_1\vec{e}_1 = \vec{0}$ donc $\Gamma_{111} = \Gamma_{211} = 0$;
$\partial_1\vec{e}_2 = \vec{u}_\theta = \frac{1}{r}\,\vec{e}_2$ donc $\Gamma_{112} = 0$ et $\Gamma_{212} = \vec{u}_\theta\cdot r\,\vec{u}_\theta = r$;
$\partial_2\vec{e}_1 = \vec{u}_\theta = \frac{1}{r}\,\vec{e}_2$ donc $\Gamma_{121} = 0$ et $\Gamma_{221} = r$;
$\partial_2\vec{e}_2 = -r\,\vec{u}_r = -r\,\vec{e}_1$ donc $\Gamma_{122} = -r$ et $\Gamma_{222} = 0$.

◊ remarque : d'après $\vec{A} = A^i\,\vec{e}_i$ les coordonnées A^i sont dites contravariantes car elles varient inversement à la base locale (A^i est divisé par deux si on double $\vec{e}_i$) ; les coordonnées $A_i = \vec{A} \cdot \vec{e}_i$ sont au contraire covariantes.

🕮 *exercice n° I.*

3. Dérivation covariante

• Lorsqu'on dérive un scalaire f, on peut définir la notion de “gradient” par une notation telle que : $d\text{f} = \partial_i \text{f}\; dx^i = \vec{\nabla}\text{f} \cdot d\vec{M}$ correspondant à : $\vec{\nabla}\text{f} = \partial^i \text{f}\; \vec{e}_i$. Le seul changement est que la base n'est généralement pas orthonormée.

Ainsi, pour les coordonnées polaires dans le plan :

$$g^{11} = 1 \;\;;\;\; g^{12} = g^{21} = 0 \;\;;\;\; g^{22} = \frac{1}{r^2} \;\;;$$

$$\vec{\nabla}\text{f} = g^{11}\,\partial_1 \text{f}\; \vec{e}_1 + g^{22}\,\partial_2 \text{f}\; \vec{e}_2 = \frac{\partial \text{f}}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial \text{f}}{\partial \theta}\; r\,\vec{u}_\theta \;\;;$$

$$\vec{\nabla}\text{f} = \frac{\partial \text{f}}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \text{f}}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta \;.$$

◊ remarque : g^{ij} est la matrice inverse telle que $g_{ij}\,g^{jk} = \delta_i^{\,k}$ (matrice unité).

• La situation se complique si on considère un vecteur $\vec{A} = A^i\,\vec{e}_i$ exprimé dans la base locale et décrivant une propriété au point M ; lorsqu'on étudie ses variations associées à des variations de M, il faut tenir compte des variations de la base locale :

$$d\vec{A} = dA^i\,\vec{e}_i + A^i\,d\vec{e}_i = dA^i\,\vec{e}_i + A^i\,\Gamma^k_{\;ij}\,dx^j\,\vec{e}_k = \left(dA^i + \Gamma^i_{\;jk}\,A^j\,dx^k\right)\vec{e}_i \;.$$

Ceci permet de définir une différentielle “absolue” telle que $d\vec{A} = DA^i\,\vec{e}_i$:

$$DA^i = dA^i + \Gamma^i_{\;jk}\,A^j\,dx^k \quad \text{(soit } DA^i = \left[d\vec{A}\,\right]^i \neq d[A^i] = dA^i \text{).}$$

On définit de façon analogue la dérivée covariante telle que $DA^i = D_jA^i\,dx^j$:

$$D_jA^i = \partial_jA^i + \Gamma^i_{\;jk}\,A^k \quad \text{(soit } D_jA^i = \left[\partial_j\vec{A}\,\right]^i \neq \partial_j[A^i] = \partial_jA^i \text{).}$$

◊ remarque : en particulier lorsqu'on déplace un vecteur sans le modifier (cette transformation est généralement nommée “transport parallèle”, bien qu'une telle expression soit ambiguë pour la norme), ses coordonnées varient car la base locale change, alors que le vecteur est constant.

• Pour les coordonnées covariantes $A_i = g_{ij}\,A^j = \vec{A}\cdot\vec{e}_i$ on obtient :

$$dA_i = dg_{ij}\,A^j + g_{ij}\,dA^j\ .$$

Avec : $dg_{ij} = \left(\Gamma^{\ell}_{\ ik}\,dx^k\,\vec{e}_\ell\right)\cdot\vec{e}_j + \vec{e}_i\cdot\left(\Gamma^{\ell}_{\ jk}\,dx^k\,\vec{e}_\ell\right)$ et $dA^j = DA^j - \Gamma^{j}_{\ k\ell}\,A^k\,dx^\ell$ on obtient : $dA_i = \Gamma_{kij}\,dx^j\,A^k + g_{ij}\,DA^j$.

Il est donc possible de définir $DA_i = g_{ij}\,DA^j = \left[d\vec{A}\,\right]_i$ telle que :

$$DA_i = dA_i - \Gamma_{kij}\,dx^j\,A^k = dA_i - \Gamma^{k}_{\ ij}\,dx^j\,A_k\ ;$$
$$DA_i = D_jA_i\,dx^j \quad \text{avec} \quad D_jA_i = \partial_jA_i - \Gamma^{k}_{\ ij}\,A_k\ .$$

• De façon analogue pour un tenseur $\mathbf{B} = B^{ij}\,\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$ (et plus généralement pour des combinaisons de coordonnées covariantes et contravariantes) :

$$DB_i^{\ j} = dB_i^{\ j} - \Gamma^{k}_{\ i\ell}\,dx^\ell\,B_k^{\ j} + \Gamma^{j}_{\ \ell k}\,B_i^{\ \ell}\,dx^k\ .$$

• Ces propriétés doivent être prises en compte dans les dérivations pour définir les opérateurs divergence et laplacien :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = D_iA^i = \partial_iA^i + \Gamma^{i}_{\ ik}\,A^k\ ;$$
$$\Delta\not{f} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\not{f} = D_i\partial^i\not{f} = \partial_i\partial^i\not{f} + \Gamma^{i}_{\ ik}\,\partial^k\not{f}\ .$$

Ainsi, pour les coordonnées polaires dans le plan :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \partial_1A^1 + \partial_2A^2 + \Gamma^{2}_{\ 21}\,A^1 = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\,A_r \quad (\text{où } A^2 = \frac{A_\theta}{r})\ ;$$
$$\Delta\not{f} = \partial_1\partial^1\not{f} + \partial_2\partial^2\not{f} + \Gamma^{2}_{\ 21}\,\partial^1\not{f} = \frac{\partial^2\not{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\not{f}}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\not{f}}{\partial r}\ .$$

◊ remarque : il n'y a par contre pas de changement dans le “rotationnel” (à part, comme pour le gradient, les précautions dues au fait que la base n'est généralement pas orthonormée) ; en effet : $D_iA_j - D_jA_i = \partial_iA_j - \partial_jA_i$.

🕮 *exercice n° II.*

4. Relations avec la métrique

• Les relations précédentes donnent en particulier :

$$Dg_{ij} = dg_{ij} - \Gamma_{ji\ell}\,dx^\ell - \Gamma_{ij\ell}\,dx^\ell = 0\ .$$

Cette propriété est associée à l'invariance de la norme d'un vecteur transporté parallèlement, c'est-à-dire tel que $DA^i = 0$:

$$D\left(\|\vec{A}\|^2\right) = D\left(g_{ij}\, A^i\, A^j\right) = 2\, A_i\, DA^i + Dg_{ij}\, A^i\, A^j = 0 \ .$$

• Cette propriété correspond en outre à : $D_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{jik} - \Gamma_{ijk} = 0.$ On obtient ainsi par permutations une autre expression de la connexion affine, directement en fonction de la métrique :

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{ijk} \ ; \ \partial_i g_{jk} = \Gamma_{kji} + \Gamma_{jki} \ ; \ \partial_j g_{ki} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{kij} \ ;$$

$$\Gamma_{kij} = \tfrac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right) \ ; \ \text{symboles de Christoffel.}$$

◊ remarque : on peut généraliser à des espaces plus complexes où la connexion affine est éventuellement différente de l'expression précédente ; on utilise alors souvent une seconde notation de type $[kij]$ pour distinguer la “connexion affine” des “symboles de Christoffel” (ou inversement).

• On en déduit par ailleurs : $\Gamma^j_{\ ij} = \frac{1}{2} g^{jk}\, \partial_i g_{jk}$. Mais la matrice inverse peut s'écrire $g^{jk} = \frac{\gamma^{jk}}{g}$ en fonction du déterminant g et des mineurs γ^{jk} des g_{jk} . Ainsi : $\partial_i g = \gamma^{jk}\, \partial_i g_{jk} = g\, g^{jk}\, \partial_i g_{jk}$ et finalement : $\Gamma^j_{\ ij} = \frac{\partial_i\left(\sqrt{|g|}\right)}{\sqrt{|g|}}$.

On en déduit ainsi d'autres expressions des divergence et laplacien :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = D_i A^i = \partial_i A^i + \frac{\partial_i\left(\sqrt{|g|}\right)}{\sqrt{|g|}}\, A^i = \frac{\partial_i\left(\sqrt{|g|}\, A^i\right)}{\sqrt{|g|}} \ ;$$

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = D_i \partial^i f = \partial_i \partial^i f + \frac{\partial_i\left(\sqrt{|g|}\right)}{\sqrt{|g|}}\, \partial^i f = \frac{\partial_i\left(\sqrt{|g|}\, \partial^i f\right)}{\sqrt{|g|}} \ .$$

exercices n° III et IV.

5. Produit vectoriel

• Dans le cas particulier d'un espace de dimension trois (mais des généralisations sont possibles), tout tenseur antisymétrique a trois coordonnées indépendantes : $B^{23} = -B^{32}$; $B^{31} = -B^{13}$; $B^{12} = -B^{21}$.

Il est donc tentant de le représenter par un “pseudo-vecteur” : $B^i \propto \frac{1}{2}\, \varepsilon^{ijk}\, B_{jk}$ en utilisant les quantités ε^{ijk} “totalement antisymétriques” (les seules composantes non nulles sont ± 1 selon le signe de la permutation de $\{ijk\}$).

◊ remarque : le facteur $\frac{1}{2}$ sert à compenser les doubles comptages, ou bien il faut limiter la sommation sur “jk” aux paires avec $k > j$.

• Une telle expression ne définit toutefois pas un vecteur ; en particulier :

$$\varepsilon^{ijk}\ g_{im}\ g_{jn}\ g_{kp} = g\ \varepsilon_{mnp} \neq \varepsilon_{mnp}\ .$$

On peut alors chercher s'il existe une fonction $\not{f}$ telle que $\not{f}\ \varepsilon^{ijk}$ soit un tenseur dont l'écriture soit invariante, de même que celle de la métrique ($D g_{ij} = 0$).

Cette condition correspond à :

$$D(\not{f}\ \varepsilon^{ijk}) = d(\not{f}\ \varepsilon^{ijk}) + \Gamma^{i}_{\ mn}\ \not{f}\ \varepsilon^{mjk}\ dx^n\ \cdots$$
$$\cdots + \Gamma^{j}_{\ mn}\ \not{f}\ \varepsilon^{imk}\ dx^n + \Gamma^{k}_{mn}\ \not{f}\ \varepsilon^{ijm}\ dx^n \quad ;$$
$$0 = \partial_n \not{f}\ \varepsilon^{ijk} + \Gamma^{i}_{\ mn}\ \not{f}\ \varepsilon^{mjk} + \Gamma^{j}_{\ mn}\ \not{f}\ \varepsilon^{imk} + \Gamma^{k}_{mn}\ \not{f}\ \varepsilon^{ijm} \quad ;$$
$$0 = \partial_n \not{f}\ \varepsilon^{123} + \Gamma^{1}_{mn}\ \not{f}\ \varepsilon^{m23} + \Gamma^{2}_{mn}\ \not{f}\ \varepsilon^{1m3} + \Gamma^{3}_{mn}\ \not{f}\ \varepsilon^{12m} \quad ;$$
$$0 = \partial_n \not{f} + \Gamma^{1}_{\ 1n}\ \not{f} + \Gamma^{2}_{\ 2n}\ \not{f} + \Gamma^{3}_{\ 3n}\ \not{f} \quad ;$$
$$0 = \frac{\partial_n \not{f}}{\not{f}} + \frac{\partial_n\left(\sqrt{|g|}\right)}{\sqrt{|g|}} \quad ; \quad \not{f} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\ .$$

• On peut alors en particulier définir une notion de produit vectoriel par :

$$\left[\vec{A} \times \vec{B}\,\right]^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\ \varepsilon^{ijk}\ A_j\ B_k \quad ; \quad \left[\vec{A} \times \vec{B}\,\right]_i = \sqrt{|g|}\ \varepsilon_{ijk}\ A^j\ B^k\ .$$

De même on peut représenter le rotationnel par : $\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}\,\right]^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\ \varepsilon^{ijk}\ \partial_j A_k$.

🕮 *exercice n° V.*