GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE EN ESPACE PLAT - corrigé des exercices

I. Coordonnées sphériques

1. • Un déplacement infinitésimal : $d\vec{M} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$ correspond pour l'abscisse curviligne à : $ds^2 = \left(d\vec{M}\right)^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)\,d\varphi^2$.
• Tous les coefficients non diagonaux de la matrice g_{ij} sont donc nuls (aucun terme en $dr.d\theta$, $dr.d\varphi$ ni $d\theta.d\varphi$) et les coefficients diagonaux sont : $g_{11} = 1$; $g_{22} = r^2$; $g_{33} = r^2\sin^2(\theta)$.

2. • Le déplacement infinitésimal : $d\vec{M} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$ correspond sur la base locale à : $d\vec{M} = dr\,\vec{e}_1 + d\theta\,\vec{e}_2 + d\varphi\,\vec{e}_3$ (avec $x_1 = r$; $x_2 = \theta$; $x_3 = \varphi$).
• Par identification, on en déduit : $\vec{e}_1 = \vec{u}_r$; $\vec{e}_2 = r\,\vec{u}_\theta$; $\vec{e}_3 = r\sin(\theta)\,\vec{u}_\varphi$.
◊ remarque : cette base est orthogonale, donc on retrouve bien que les produits scalaires non diagonaux sont nuls : $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ pour $i \neq j$; par ailleurs on retrouve aussi les termes diagonaux : $g_{ii} = (\vec{e}_i)^2$ (la base locale n'est pas normée).

3. • Le vecteur unitaire $\vec{u}_r = \vec{u}_r(\theta, \varphi)$ a pour variation élémentaire : $d\vec{u}_r = d\theta\,\vec{u}_\theta + \sin(\theta)\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$, ce qui peut s'écrire : $d\vec{e}_1 = \frac{1}{r}\,d\theta\,\vec{e}_2 + \frac{1}{r}\,d\varphi\,\vec{e}_3$.
• Ceci correspond à : ${\Gamma^k}_{1j} = 0$ sauf pour : ${\Gamma^2}_{12} = \frac{1}{r}$ et ${\Gamma^3}_{13} = \frac{1}{r}$.

• Le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta = \vec{u}_\theta(\theta, \varphi)$ a pour variation élémentaire : $d\vec{u}_\theta = -d\theta\,\vec{u}_r + \cos(\theta)\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$, ce qui peut s'écrire : $d\vec{e}_2 = dr\,\vec{u}_\theta + r\,d\vec{u}_\theta = -r\,d\theta\,\vec{e}_1 + \frac{1}{r}\,dr\,\vec{e}_2 + \cot(\theta)\,d\varphi\,\vec{e}_3$.
• Ceci donne : ${\Gamma^k}_{2j} = 0$ sauf pour : ${\Gamma^1}_{22} = -r$; ${\Gamma^2}_{21} = \frac{1}{r}$ et ${\Gamma^3}_{23} = \cot(\theta)$.

• Le vecteur $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_\varphi(\varphi)$ a pour variation élémentaire : $d\vec{u}_\varphi = -\sin(\theta)\,d\varphi\,\vec{u}_r - \cos(\theta)\,d\varphi\,\vec{u}_\theta$, ce qui s'écrit : $d\vec{e}_3 = dr\,\sin(\theta)\,\vec{u}_\varphi + r\,\cos(\theta)\,d\theta\,\vec{u}_\varphi + r\,\sin(\theta)\,d\vec{u}_\varphi$;

$$d\vec{e}_3 = -r\,\sin^2(\theta)\,d\varphi\,\vec{e}_1 - \sin(\theta)\,\cos(\theta)\,d\varphi\,\vec{e}_2 + \left[\frac{1}{r}\,dr + \cot(\theta)\,d\theta\right]\vec{e}_3 \ .$$

• Ceci donne : ${\Gamma^k}_{3j} = 0$ sauf pour :

$${\Gamma^1}_{33} = -r\,\sin^2(\theta) \ ; \ {\Gamma^2}_{33} = -\sin(\theta)\,\cos(\theta) \ ; \ {\Gamma^3}_{31} = \frac{1}{r} \ \text{ et } \ {\Gamma^3}_{32} = \cot(\theta) \ .$$

◊ remarque : on constate la symétrie par rapport aux deux derniers indices : ${\Gamma^k}_{ij} = {\Gamma^k}_{ji}$.

4. • En abaissant le troisième indice (multiplication par la matrice $g_{k\ell}$) :

$$\Gamma_{212} = r \ \text{ et } \ \Gamma_{313} = r\,\sin^2(\theta) \ ; \ \Gamma_{122} = -r \ ; \ \Gamma_{221} = r \ \text{ et } \ \Gamma_{323} = r^2\,\sin(\theta)\,\cos(\theta) \ ;$$
$$\Gamma_{133} = -r\,\sin^2(\theta) \ ; \ \Gamma_{233} = -r^2\,\sin(\theta)\,\cos(\theta) \ ;$$
$$\Gamma_{331} = r\,\sin^2(\theta) \ \text{ et } \ \Gamma_{332} = r^2\,\sin(\theta)\,\cos(\theta) \ .$$

◊ remarque : on constate la symétrie par rapport aux deux derniers indices : $\Gamma_{kij} = \Gamma_{kji}$.

II. Dérivations en coordonnées sphériques

1. • Le déplacement infinitésimal : $d\vec{M} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\,\sin(\theta)\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$ correspond sur la base locale à : $d\vec{M} = dr\,\vec{e}_1 + d\theta\,\vec{e}_2 + d\varphi\,\vec{e}_3$ (avec $x_1 = r$; $x_2 = \theta$; $x_3 = \varphi$).
• Par identification, on en déduit : $\vec{e}_1 = \vec{u}_r$; $\vec{e}_2 = r\,\vec{u}_\theta$; $\vec{e}_3 = r\,\sin(\theta)\,\vec{u}_\varphi$.
• Tous les coefficients non diagonaux de la matrice g_{ij} sont donc nuls (aucun terme en $dr.d\theta$, $dr.d\varphi$ ni $d\theta.d\varphi$) et les coefficients diagonaux sont : $g_{11} = 1$; $g_{22} = r^2$; $g_{33} = r^2\,\sin^2(\theta)$.
• Les coefficients non diagonaux de la matrice inverse g^{ij} sont donc nuls et les coefficients diagonaux sont : $g^{11} = 1$; $g^{22} = \frac{1}{r^2}$; $g^{33} = \frac{1}{r^2\,\sin^2(\theta)}$.

2. • Ainsi, pour les coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} V = g^{11}\,\partial_1 V\,\vec{e}_1 + g^{22}\,\partial_2 V\,\vec{e}_2 + g^{33}\,\partial_3 V\,\vec{e}_3 = \frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,r\,\vec{u}_\theta + \frac{1}{r^2\,\sin^2(\theta)}\,\frac{\partial V}{\partial \varphi}\,r\,\sin(\theta)\,\vec{u}_\varphi \;;$$

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\,\sin(\theta)}\,\frac{\partial V}{\partial \varphi}\,\vec{u}_\varphi \,.$$

3.a. • On obtient dans ce cas (à part les symétries, les autres coefficients sont nuls) :

$\Gamma^2{}_{12} = \frac{1}{r}$ et $\Gamma^3{}_{13} = \frac{1}{r}$;
$\Gamma^1{}_{22} = -r$ et $\Gamma^3{}_{23} = \cot(\theta)$;
$\Gamma^1{}_{33} = -r\,\sin^2(\theta)$; $\Gamma^2{}_{33} = -\sin(\theta)\,\cos(\theta)$.

• On en déduit :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \partial_1 A^1 + \partial_2 A^2 + \partial_3 A^3 + (\Gamma^2{}_{21} + \Gamma^3{}_{31})\,A^1 + \Gamma^3{}_{32}\,A^2 \;;$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_{[r]}}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial A_{[\theta]}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,\sin(\theta)}\,\frac{\partial A_{[\varphi]}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r}\,A_{[r]} + \frac{\cot(\theta)}{r}\,A_{[\theta]} \,.$$

◊ remarque : il faut faire attention aux conventions “usuelles” notant $A_{[r]}$, $A_{[\theta]}$ et $A_{[\varphi]}$ (où ici des crochets ont été ajoutés afin d'éviter l'ambiguïté) les coordonnées <u>contravariantes</u> sur la base <u>orthonormée</u>, c'est à dire pour $A_{[i]} = \sqrt{g_{ii}}\,A^i = \sqrt{g^{ii}}\,A_i$.

3.b. • De façon analogue :

$$\Delta f = \partial_1\partial^1 f + \partial_2\partial^2 f + \partial_3\partial^3 f + (\Gamma^2{}_{21} + \Gamma^3{}_{31})\,\partial^1 f + \Gamma^3{}_{32}\,\partial^2 f \;;$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\,\sin^2(\theta)}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cot(\theta)}{r^2}\,\frac{\partial f}{\partial \theta} \,.$$

III. <u>Dérivations en coordonnées sphériques</u>

1. • Le déplacement infinitésimal : $d\vec{M} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$ correspond sur la base locale à : $d\vec{M} = dr\,\vec{e}_1 + d\theta\,\vec{e}_2 + d\varphi\,\vec{e}_3$ (avec $x_1 = r$; $x_2 = \theta$; $x_3 = \varphi$).

• Par identification, on en déduit : $\vec{e}_1 = \vec{u}_r$; $\vec{e}_2 = r\,\vec{u}_\theta$; $\vec{e}_3 = r\,\sin(\theta)\,\vec{u}_\varphi$.

• Tous les coefficients non diagonaux de la matrice g_{ij} sont donc nuls (aucun terme en $dr.d\theta$, $dr.d\varphi$ ni $d\theta.d\varphi$) et les coefficients diagonaux sont : $g_{11} = 1$; $g_{22} = r^2$; $g_{33} = r^2\,\sin^2(\theta)$.

• Les coefficients non diagonaux de la matrice inverse g^{ij} sont donc nuls et les coefficients diagonaux sont : $g^{11} = 1$; $g^{22} = \frac{1}{r^2}$; $g^{33} = \frac{1}{r^2\,\sin^2(\theta)}$.

2.a. • Le déterminant du tenseur métrique est : $g = r^4\,\sin^2(\theta)$.

• On en déduit : $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial_i\left(\sqrt{|g|}\,A^i\right)}{\sqrt{|g|}} = \frac{\partial A_{[r]}}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial A_{[\theta]}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,\sin(\theta)}\,\frac{\partial A_{[\varphi]}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r}\,A_{[r]} + \frac{\cot(\theta)}{r}\,A_{[\theta]}$.

◊ remarque : il faut faire attention aux conventions “usuelles” notant $A_{[r]}$, $A_{[\theta]}$ et $A_{[\varphi]}$ (où ici des crochets ont été ajoutés afin d'éviter l'ambiguïté) les coordonnées <u>contravariantes</u> sur la base <u>orthonormée</u>, c'est à dire pour $A_{[i]} = \sqrt{g_{ii}}\,A^i = \sqrt{g^{ii}}\,A_i$.

2.b. • De façon analogue : $\Delta f = \frac{\partial_i\left(\sqrt{|g|}\,\partial^i f\right)}{\sqrt{|g|}} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\,\sin^2(\theta)}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cot(\theta)}{r^2}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

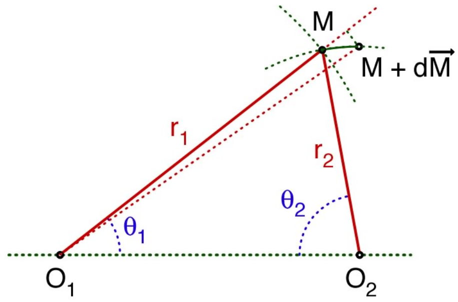
IV. <u>Coordonnées bipolaires</u>

1.a. • Le vecteur de base $\vec{e}_1 = \partial_1\vec{M} = \left[\frac{\partial\vec{M}}{\partial r_1}\right]_{r_2=Cte}$ est associé à une variation de r_1 (dans le sens croissant) avec r_2 constant. Ceci correspond à un déplacement sur le cercle de rayon r_2 dans le sens de θ_2 croissant, ce qui est justement l'orientation du vecteur unitaire $\vec{u}_{\theta_2}$ (et inversement pour $\vec{e}_2$ et $\vec{u}_{\theta_1}$).

1.b. • On obtient dans le triangle : $L^2 = {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2\,r_1\,r_2\,\cos(\theta_3)$ avec $\theta_3 = \pi - \theta_1 - \theta_2$.

• Ceci correspond effectivement à : $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \frac{L^2 - {r_1}^2 - {r_2}^2}{2\,r_1\,r_2}$.

1.c. • Pour une variation dr_1 avec r_2 constant, la longueur du déplacement est $ds = r_2\,d\theta_2$ (arc de cercle élémentaire). Or, l'angle entre ce déplacement (selon $\vec{u}_{\theta_2}$) et la direction de $\overrightarrow{O_1M}$ (selon $\vec{u}_{r_1}$) est $\frac{\pi}{2} - \theta_3 = \theta_1 + \theta_2 - \frac{\pi}{2}$. La variation correspond donc à : $dr_1 = ds\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_3\right) = ds\ \sin(\theta_1 + \theta_2)$.



• Or, dans ce cas : $\vec{e}_1\ d(r_1) = \partial_1\vec{M}\ dx_1 = d\vec{M}$ ou encore : $\|\vec{e}_1\|\ d(r_1) = ds$. Par comparaison : $\|\vec{e}_1\| = \frac{1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$ (et de même pour $\|\vec{e}_2\|$ d'après la symétrie du dispositif).

• En utilisant $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta_1 + \theta_2)}$ on obtient le résultat indiqué (de ce côté de O_1O_2).

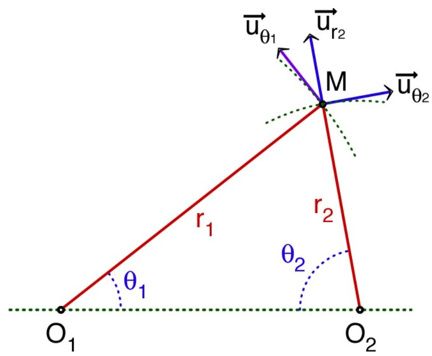
1.d. • En sachant que $ds^2 = g_{ij}\ dx^i\ dx^j$ avec $g_{11} = \|\vec{e}_1\|^2$ et $g_{22} = \|\vec{e}_2\|^2$ on obtient effectivement les coefficients indiqués pour les termes en $dr_1{}^2$ et $dr_2{}^2$.

• Le troisième coefficient, pour le terme en $dr_1\ dr_2$, correspond à :

$$g_{12} + g_{21} = 2\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 2\ \|\vec{e}_1\|\,.\,\|\vec{e}_2\|\ \cos(\pi - \theta_3) = 2\ \frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)} = \frac{2\left(\frac{L^2 - r_1{}^2 - r_2{}^2}{2\,r_1\,r_2}\right)}{1 - \left(\frac{L^2 - r_1{}^2 - r_2{}^2}{2\,r_1\,r_2}\right)^2} .$$

2. • Lors d'une variation de r_1 avec r_2 constant, le vecteur unitaire $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\ \vec{u}_{\theta_2}$ a pour dérivée partielle : $\partial_1\vec{e}_1 = -\frac{1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}\ \frac{\partial(\sin(\theta_1+\theta_2))}{\partial r_1}\ \vec{u}_{\theta_2} + \frac{1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\ \frac{\partial\vec{u}_{\theta_2}}{\partial r_1}$.

• Le premier terme est : $-\frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial r_1} + \frac{\partial\theta_2}{\partial r_1}\right)\ \vec{e}_1$ avec : $\frac{\partial\theta_1}{\partial r_1} = \frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_1\ \sin(\theta_1+\theta_2)}$ et $\frac{\partial\theta_2}{\partial r_1} = \frac{1}{r_2\ \sin(\theta_1+\theta_2)}$.



• Le second terme correspond à :

$$\frac{1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\ \frac{\partial\vec{u}_{\theta_2}}{\partial\theta_2}\ \frac{\partial\theta_2}{\partial r_1} = -\frac{1}{r_2\ \sin^2(\theta_1+\theta_2)}\ \vec{u}_{r_2} .$$

• Les projections : $\vec{u}_{\theta_1} = \sin(\theta_1 + \theta_2)\ \vec{u}_{r_2} + \cos(\theta_1 + \theta_2)\ \vec{u}_{\theta_2}$ donnent : $\vec{u}_{r_2} = \vec{e}_2 - \cos(\theta_1 + \theta_2)\ \vec{e}_1$.

• D'après : $\partial_1\vec{e}_1 = \Gamma^1{}_{11}\ \vec{e}_1 + \Gamma^2{}_{11}\ \vec{e}_2$ on en déduit (ici sans expliciter les angles fonction de r_1 et r_2) :

$$\Gamma^1{}_{11} = -\frac{\cos^2(\theta_1+\theta_2)}{r_1\ \sin^2(\theta_1+\theta_2)}\ ;\ \Gamma^2{}_{11} = -\frac{1}{r_2\ \sin^2(\theta_1+\theta_2)} .$$

• Par symétrie du dispositif :

$$\Gamma^2{}_{22} = -\frac{\cos^2(\theta_1+\theta_2)}{r_2\ \sin^2(\theta_1+\theta_2)}\ ;\ \Gamma^1{}_{22} = -\frac{1}{r_1\ \sin^2(\theta_1+\theta_2)} .$$

• Lors d'une variation de r_1 avec r_2 constant, le vecteur unitaire $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\ \vec{u}_{\theta_1}$ a pour dérivée partielle : $\partial_1\vec{e}_2 = -\frac{1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}\ \frac{\partial(\sin(\theta_1+\theta_2))}{\partial r_1}\ \vec{u}_{\theta_1} + \frac{1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\ \frac{\partial\vec{u}_{\theta_1}}{\partial r_1}$.

• Le premier terme correspond à : $-\frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial r_1} + \frac{\partial\theta_2}{\partial r_1}\right)\ \vec{e}_2$ avec (de façon analogue à précédemment) : $\frac{\partial\theta_1}{\partial r_1} = \frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_1\ \sin(\theta_1+\theta_2)}$ et $\frac{\partial\theta_2}{\partial r_1} = \frac{1}{r_2\ \sin(\theta_1+\theta_2)}$.

• Le second terme correspond à : $\frac{1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\ \frac{\partial\vec{u}_{\theta_1}}{\partial\theta_1}\ \frac{\partial\theta_1}{\partial r_1} = -\frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_1\ \sin^2(\theta_1+\theta_2)}\ \vec{u}_{r_1}$.

• Les projections : $\vec{u}_{\theta_2} = \sin(\theta_1 + \theta_2)\ \vec{u}_{r_1} + \cos(\theta_1 + \theta_2)\ \vec{u}_{\theta_1}$ donnent : $\vec{u}_{r_1} = \vec{e}_1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)\ \vec{e}_2$.

• D'après : $\partial_1\vec{e}_2 = \Gamma^1{}_{12}\ \vec{e}_1 + \Gamma^2{}_{12}\ \vec{e}_2$ on en déduit : $\Gamma^1{}_{12} = -\frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_1\ \sin^2(\theta_1+\theta_2)}$; $\Gamma^2{}_{12} = -\frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_2\ \sin^2(\theta_1+\theta_2)}$.

• En utilisant les symétries : $\Gamma^2{}_{21} = -\frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_2\ \sin^2(\theta_1+\theta_2)}$; $\Gamma^1{}_{21} = -\frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_1\ \sin^2(\theta_1+\theta_2)}$; on vérifie alors qu'on obtient : $\Gamma^1{}_{21} = \Gamma^1{}_{12}$ et $\Gamma^2{}_{21} = \Gamma^2{}_{12}$.

3.a. • On peut utiliser la relation générale : $\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right)$.

• On obtient ainsi :

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2}\partial_1 g_{11} = -\frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin^3(\theta_1+\theta_2)}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial r_1} + \frac{\partial\theta_2}{\partial r_1}\right) = -\frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin^4(\theta_1+\theta_2)}\left(\frac{1}{r_2} + \frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_1}\right)\ ;$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{211} &= \partial_1 g_{12} - \tfrac{1}{2}\partial_2 g_{11} = \tfrac{1+\cos^2(\theta_1+\theta_2)}{\sin^3(\theta_1+\theta_2)}\left(\tfrac{\partial\theta_1}{\partial r_1} + \tfrac{\partial\theta_2}{\partial r_1}\right) + \tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin^3(\theta_1+\theta_2)}\left(\tfrac{\partial\theta_1}{\partial r_2} + \tfrac{\partial\theta_2}{\partial r_2}\right)\\
&= -\tfrac{1+\cos^2(\theta_1+\theta_2)}{\sin^4(\theta_1+\theta_2)}\left(\tfrac{1}{r_2} + \tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_1}\right) + \tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin^4(\theta_1+\theta_2)}\left(\tfrac{1}{r_1} + \tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_2}\right)\\
&= -\tfrac{1}{\sin^4(\theta_1+\theta_2)}\left(\tfrac{\cos^3(\theta_1+\theta_2)}{r_1} + \tfrac{1}{r_2}\right) \ ;\\
\Gamma_{112} &= \Gamma_{121} = \tfrac{1}{2}\partial_2 g_{11} = -\tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin^4(\theta_1+\theta_2)}\left(\tfrac{1}{r_1} + \tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_2}\right) \ ;\\
\Gamma_{212} &= \Gamma_{221} = \tfrac{1}{2}\partial_1 g_{22} = \Gamma_{111} = -\tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin^4(\theta_1+\theta_2)}\left(\tfrac{1}{r_2} + \tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_1}\right) \ ;\\
\Gamma_{122} &= \partial_2 g_{12} - \tfrac{1}{2}\partial_1 g_{22} = \tfrac{1+\cos^2(\theta_1+\theta_2)}{\sin^3(\theta_1+\theta_2)}\left(\tfrac{\partial\theta_1}{\partial r_2} + \tfrac{\partial\theta_2}{\partial r_2}\right) + \tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin^3(\theta_1+\theta_2)}\left(\tfrac{\partial\theta_1}{\partial r_1} + \tfrac{\partial\theta_2}{\partial r_1}\right)\\
&= -\tfrac{1+\cos^2(\theta_1+\theta_2)}{\sin^4(\theta_1+\theta_2)}\left(\tfrac{1}{r_1} + \tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_2}\right) + \tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin^4(\theta_1+\theta_2)}\left(\tfrac{1}{r_2} + \tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_1}\right)\\
&= -\tfrac{1}{\sin^4(\theta_1+\theta_2)}\left(\tfrac{\cos^3(\theta_1+\theta_2)}{r_2} + \tfrac{1}{r_1}\right) \ ;\\
\Gamma_{222} &= \tfrac{1}{2}\partial_2 g_{22} = -\tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin^3(\theta_1+\theta_2)}\left(\tfrac{\partial\theta_1}{\partial r_2} + \tfrac{\partial\theta_2}{\partial r_2}\right) = -\tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin^4(\theta_1+\theta_2)}\left(\tfrac{1}{r_1} + \tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_2}\right) .
\end{aligned}$$

3.b. • On peut utiliser la relation : $\Gamma^k{}_{ij} = \Gamma_{\ell ij}\, g^{\ell k}$ où $g^{\ell k}$ est le tenseur “inverse” tel que $g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k$.
• On obtient ainsi : $g^{11} = g^{22} = 1$; $g^{12} = g^{21} = -\cos(\theta_1 + \theta_2)$.
• On retrouve ainsi :

$$\begin{aligned}
\Gamma^1{}_{11} &= \Gamma_{111}\, g^{11} + \Gamma_{211}\, g^{21} = -\tfrac{\cos^2(\theta_1+\theta_2)}{r_1\ \sin^2(\theta_1+\theta_2)} \ ;\\
\Gamma^2{}_{11} &= \Gamma_{111}\, g^{12} + \Gamma_{211}\, g^{22} = -\tfrac{1}{r_2\ \sin^2(\theta_1+\theta_2)} \ ;\\
\Gamma^1{}_{12} &= \Gamma^1{}_{21} = \Gamma_{112}\, g^{11} + \Gamma_{212}\, g^{21} = -\tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_1\ \sin^2(\theta_1+\theta_2)} \ ;\\
\Gamma^2{}_{12} &= \Gamma^2{}_{21} = \Gamma_{112}\, g^{12} + \Gamma_{212}\, g^{22} = -\tfrac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{r_2\ \sin^2(\theta_1+\theta_2)} \ ;\\
\Gamma^1{}_{22} &= \Gamma_{122}\, g^{11} + \Gamma_{222}\, g^{21} = -\tfrac{1}{r_1\ \sin^2(\theta_1+\theta_2)} \ ;\\
\Gamma^2{}_{22} &= \Gamma_{122}\, g^{12} + \Gamma_{222}\, g^{22} = -\tfrac{\cos^2(\theta_1+\theta_2)}{r_2\ \sin^2(\theta_1+\theta_2)} .
\end{aligned}$$

V. <u>Dérivations en coordonnées sphériques</u>

1. • Le déplacement infinitésimal : $d\vec{M} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\ \sin(\theta)\ d\varphi\,\vec{u}_\varphi$ correspond sur la base locale à : $d\vec{M} = dr\,\vec{e}_1 + d\theta\,\vec{e}_2 + d\varphi\,\vec{e}_3$ (avec $x_1 = r$; $x_2 = \theta$; $x_3 = \varphi$).
• Par identification, on en déduit : $\vec{e}_1 = \vec{u}_r$; $\vec{e}_2 = r\,\vec{u}_\theta$; $\vec{e}_3 = r\ \sin(\theta)\ \vec{u}_\varphi$.
• Tous les coefficients non diagonaux de la matrice g_{ij} sont donc nuls (aucun terme en $dr.d\theta$, $dr.d\varphi$ ni $d\theta.d\varphi$) et les coefficients diagonaux sont : $g_{11} = 1$; $g_{22} = r^2$; $g_{33} = r^2\ \sin^2(\theta)$.
• Les coefficients non diagonaux de la matrice inverse g^{ij} sont donc nuls et les coefficients diagonaux sont : $g^{11} = 1$; $g^{22} = \frac{1}{r^2}$; $g^{33} = \frac{1}{r^2\ \sin^2(\theta)}$.

2. • Le rotationnel est associé au produit extérieur : $\left[\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\,\right]_{ij} = D_i A_j - D_j A_i = \partial_i A_j - \partial_j A_i$.
◊ remarque : on obtient en effet $D_i A_j - D_j A_i = \left(\partial_i A_j - \Gamma^k{}_{ji}\, A_k\right) - \left(\partial_j A_i - \Gamma^k{}_{ij}\, A_k\right)$ avec $\Gamma^k{}_{ji} = \Gamma^k{}_{ij}$.
• On obtient ainsi :

$$\left[\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\,\right]_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = r\ \cos(\theta)\ A_{[\varphi]} + r\ \sin(\theta)\ \frac{\partial A_{[\varphi]}}{\partial\theta} - r\ \frac{\partial A_{[\theta]}}{\partial\varphi} \ ;$$
$$\left[\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\,\right]_{31} = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 = \frac{\partial A_{[r]}}{\partial\varphi} - \sin(\theta)\ A_{[\varphi]} - r\ \sin(\theta)\ \frac{\partial A_{[\varphi]}}{\partial r} \ ;$$
$$\left[\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\,\right]_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = A_{[\theta]} + r\ \frac{\partial A_{[\theta]}}{\partial r} - \frac{\partial A_{[r]}}{\partial\theta} .$$

◊ remarque : il faut faire attention aux conventions “usuelles” notant $A_{[r]}$, $A_{[\theta]}$ et $A_{[\varphi]}$ (où ici des crochets ont été ajoutés afin d'éviter l'ambiguïté) les coordonnées <u>contravariantes</u> sur la base <u>orthonormée</u>, c'est à dire pour $A_{[i]} = \sqrt{g_{ii}}\, A^i = \sqrt{g^{ii}}\, A_i$.
• Ceci correspond à : $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left[\vec{\nabla}\right]^i A^j\, \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j = \left[\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\,\right]_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ avec ici :

$$\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 = r^2\ \sin(\theta)\ \vec{u}_\theta \otimes \vec{u}_\varphi \ ; \ \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 = r\ \sin(\theta)\ \vec{u}_\varphi \otimes \vec{u}_r \ ; \ \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 = r\,\vec{u}_r \otimes \vec{u}_\theta .$$

• On obtient ainsi :

$$\left[\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\,\right]_{[\theta\varphi]} = \frac{1}{r^2\ \sin(\theta)} \left[\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\,\right]_{23} = \frac{\cot(\theta)}{r}\ A_{[\varphi]} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial A_{[\varphi]}}{\partial\theta} - \frac{1}{r\ \sin(\theta)}\ \frac{\partial A_{[\theta]}}{\partial\varphi} \ ;$$

$$\left[\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right]_{[\varphi r]} = \frac{1}{r\ \sin(\theta)}\left[\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right]_{31} = \frac{1}{r\ \sin(\theta)}\frac{\partial A_{[r]}}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\ A_{[\varphi]} - \frac{\partial A_{[\varphi]}}{\partial r}\ ;$$
$$\left[\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right]_{[r\theta]} = \frac{1}{r}\left[\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right]_{12} = \frac{1}{r}\ A_{[\theta]} + \frac{\partial A_{[\theta]}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_{[r]}}{\partial\theta}\ .$$

3. • Dans un espace de dimension 3, ce tenseur antisymétrique n'a que trois composantes indépendantes ; il peut donc être représenté par un pseudo-vecteur $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ tel que : $B^j = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\ \varepsilon^{ijk}\ \partial_j A_k$.

◊ remarque : ceci correspond à l'opérateur $\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \left[\vec{B}\times\right]$.

• Le déterminant du tenseur métrique est : $g = r^4\ \sin^2(\theta)$.

• On obtient ainsi :

$$\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]^1 = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left[\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right]_{23} = \frac{\cot(\theta)}{r}\ A_{[\varphi]} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{[\varphi]}}{\partial\theta} - \frac{1}{r\ \sin(\theta)}\frac{\partial A_{[\theta]}}{\partial\varphi}\ ;$$
$$\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]^2 = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left[\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right]_{31} = \frac{1}{r^2\ \sin(\theta)}\frac{\partial A_{[r]}}{\partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\ A_{[\varphi]} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_{[\varphi]}}{\partial r}\ ;$$
$$\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]^3 = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left[\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right]_{12} = \frac{1}{r^2\ \sin(\theta)}\ A_{[\theta]} + \frac{1}{r\ \sin(\theta)}\frac{\partial A_{[\theta]}}{\partial r} - \frac{1}{r^2\ \sin(\theta)}\frac{\partial A_{[r]}}{\partial\theta}\ .$$

• Ceci donne finalement :

$$\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]^{[r]} = \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]^1 = \frac{\cot(\theta)}{r}\ A_{[\varphi]} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{[\varphi]}}{\partial\theta} - \frac{1}{r\ \sin(\theta)}\frac{\partial A_{[\theta]}}{\partial\varphi}\ ;$$
$$\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]^{[\theta]} = r\,.\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]^2 = \frac{1}{r\ \sin(\theta)}\frac{\partial A_{[r]}}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\ A_{[\varphi]} - \frac{\partial A_{[\varphi]}}{\partial r}\ ;$$
$$\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]^{[\varphi]} = r\ \sin(\theta)\ \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]^3 = \frac{1}{r}\ A_{[\theta]} + \frac{\partial A_{[\theta]}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_{[r]}}{\partial\theta}\ .$$

◊ remarque : on obtient les mêmes expressions que pour $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ (même si elles sont utilisées différemment) parce que la base $(\vec{u}_r\ ,\vec{u}_\theta\ ,\vec{u}_\varphi)$ est orthonormée.