GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE EN ESPACE PLAT - exercices

I. Coordonnées sphériques

1. • Le tenseur métrique g_{ij} définit l'élément de longueur selon $ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$. Quelle est l'expression du tenseur métrique en coordonnées sphériques ?

2. • Le tenseur g_{ij} variant suivant le lieu, on utilise le repère local $\vec{e}_i$ tel que : $d\vec{M} = \partial_i \vec{M}\, dx^i = \vec{e}_i\, dx^i$. Les $\vec{e}_i$ ne sont généralement pas unitaires ; ainsi : $g_{ij} = \partial_i \vec{M} \cdot \partial_j \vec{M} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$.
• Quelle sont les expressions des $\vec{e}_i$ en coordonnées sphériques, par comparaison aux $(\vec{u}_r\,,\ \vec{u}_\theta\,,\ \vec{u}_\varphi)$ utilisés habituellement ?

3. • En un point voisin $\vec{M}' = \vec{M} + d\vec{M}$, le repère local devient $\vec{e}_i{}' = \vec{e}_i + d\vec{e}_i$; on exprime alors les $d\vec{e}_i$ dans la base des $\vec{e}_i$: $d\vec{e}_i = \Gamma^k{}_{ij}\, dx^j\, \vec{e}_k$.
• Quelle sont les expressions des $\Gamma^k{}_{ij}$ en coordonnées sphériques ?

4. • On peut par ailleurs considérer que : $\Gamma^k{}_{ij}\, \vec{e}_k = \partial_j \vec{e}_i$ d'où on déduit : $\Gamma^k{}_{ij}\, \vec{e}_k \cdot \vec{e}_\ell = \Gamma^k{}_{ij}\, g_{k\ell} = \Gamma_{\ell ij}$.
• Quelle sont les expressions des $\Gamma_{\ell ij}$ en coordonnées sphériques ?

II. Dérivations en coordonnées sphériques

1. • Calculer le tenseur g^{ij} en coordonnées sphériques.

2. • Établir l'expression du gradient en coordonnées sphériques, en fonction de la base orthonormée “usuelle” $(\vec{u}_r\,,\ \vec{u}_\theta\,,\ \vec{u}_\varphi)$.

3. • Établir de façon analogue les expressions :
a) de la divergence ;
b) du laplacien.

III. Dérivations en coordonnées sphériques

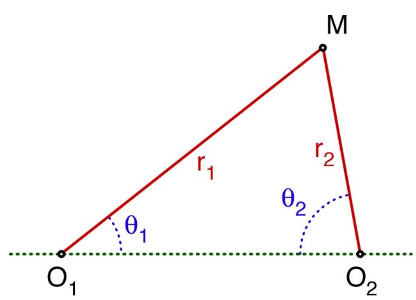
1. • Calculer le tenseur g^{ij} en coordonnées sphériques.

2. • À partir de cette métrique et de son déterminant, établir les expressions :
a) de la divergence ;
b) du laplacien.

IV. Coordonnées bipolaires

• On choisit de repérer un point M du plan à l'aide de ses distances r_1 et r_2 par rapport à deux origines O_1 et O_2 (cela ne pose pas d'ambiguïté tant que le point M ne change pas de côté par rapport à la droite O_1O_2).

◊ remarque : ce type de coordonnées est utile par exemple pour calculer la position d'un objet détecté par deux radars ; une autre démarche consisterait à utiliser les deux angles, mais ce n'est pas le sujet ici.



1. a) Justifier que le repère local est tel que $\vec{e}_1$ est orienté comme le vecteur unitaire polaire $\vec{u}_{\theta_2}$ (et inversement).

b) En notant $\vec{L} = \overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}$, justifier que : $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \frac{L^2 - {r_1}^2 - {r_2}^2}{2\, r_1 r_2}$.

c) Justifier que : $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \frac{1}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{{r_1}^2 + {r_2}^2 - L^2}{2\, r_1 r_2}\right)^2}}$.

d) En considérant en outre $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2$, justifier que l'élément de longueur est :

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j = \frac{{dr_1}^2 + {dr_2}^2 - 2\left(\frac{{r_1}^2 + {r_2}^2 - L^2}{2\, r_1 r_2}\right) dr_1 dr_2}{1 - \left(\frac{{r_1}^2 + {r_2}^2 - L^2}{2\, r_1 r_2}\right)^2} .$$

2. • Par une méthode géométrique, calculer les expressions des ${\Gamma^k}_{ij}$ en coordonnées bipolaires.
◊ remarque : il peut être judicieux de passer par l'intermédiaire de $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ et $\sin(\theta_1 + \theta_2)$.

3. a) Calculer les expressions des $\Gamma_{\ell ij}$ en coordonnées bipolaires à partir de la métrique g_{ij} .
b) En déduire une vérification du résultat de la question précédente (vérification non inutile...).

V. Dérivations en coordonnées sphériques

1. • Calculer le tenseur g^{ij} en coordonnées sphériques.

2. • Établir l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques, en fonction de la base orthonormée “usuelle” $(\vec{u}_r\, ,\ \vec{u}_\theta\, ,\ \vec{u}_\varphi)$.

3. • Établir la notation vectorielle du rotationnel.