RG III - MOUVEMENTS DE PARTICULES

1. Distances et durées

◊ remarque : dans un but d'application à relativité générale, la notation à quatre dimensions (incluant le temps) est associée à des indices en caractères grecs $(0, 1, 2, 3)$, réservant par opposition les indices en caractères latins pour la partie spatiale $(1, 2, 3)$, lorsque celle-ci est étudiée à part.

• Si on utilise un repérage par des coordonnées quelconques, certaines notions usuellement admises en physique peuvent devenir inadaptées ; on commence par les préciser.

• Avec un système de coordonnées x^α, le temps propre ne correspond pas à la variable x^0 mais à la quantité τ telle que : $c^2\, d\tau^2 = ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$.

Pour un point fixe, tel que $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$, la durée locale correspond à : $c^2\, d\tau^2 = ds^2 = g_{00}\,.(dx^0)^2$, c'est-à-dire à $dt_{\ell oc} = d\tau = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c}\, dx^0$.

• Pour exprimer l'intervalle d'espace $d\ell$, on peut considérer un signal lumineux partant d'un point A vers un point B infiniment voisin, puis renvoyé immédiatement en sens inverse. Les variations des coordonnées sont alors telles que : $ds^2 = g_{00}\,.(dx^0)^2 + 2\, g_{0i}\, dx^0\, dx^i + g_{ij}\, dx^i\, dx^j = 0$.

Avec des conventions liées au même sens de propagation, les deux parties du trajet correspondent donc à :

$$dx^0 = \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0i}\, dx^i \pm \sqrt{\left(g_{0i}\, g_{0j} - g_{00}\, g_{ij}\right) dx^i\, dx^j}\,\right) .$$

En rectifiant la convention de sens pour l'aller-retour, la durée du trajet est telle que : $c\, d\tau = \sqrt{g_{00}}\,.[dx^0(AB) + dx^0(BA)] = 2\sqrt{\left(\frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}\right) dx^i\, dx^j} = 2\, d\ell$.

• La notion locale de distance est donc décrite par $d\ell^2 = \mathscr{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j$ avec un tenseur métrique tridimensionnel : $\mathscr{g}_{ij} = \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}$.

◊ remarque : de la propriété $g^{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$ on déduit $g^{i0}\, g_{0k} + g^{ij}\, g_{jk} = \delta^{i}_{k}$ et $g^{i0}\, g_{00} + g^{ij}\, g_{j0} = 0$; ainsi en substituant : $g^{ij}\, \mathscr{g}_{jk} = \delta^{i}_{k}$ (cette métrique spatiale est donc l'inverse de la partie spatiale $\mathscr{g}^{ij} = g^{ij}$).

◊ remarque : si la métrique dépend du temps, la “distance” calculée en intégrant $d\ell$ sur un trajet (non instantané) doit être interprétée avec précaution ; l'intégration de la “durée” $dt_{\ell oc}$ sur un trajet a généralement peu de signification dès lors que la perception de la durée dépend du lieu.

• Pour repérer complètement les événements, il peut être insuffisant de savoir comparer les durées : il est souhaitable de pouvoir synchroniser les horloges.

Dans la situation précédente, on peut considérer comme synchrones l'indication de l'horloge en B, à l'instant du passage du signal, avec celle de l'horloge en A, au milieu de l'intervalle.

Deux événements simultanés, en deux points voisins, sont donc séparés par un décalage : $dx^0 = \frac{1}{2}\,[dx^0(AB) - dx^0(BA)] = -\frac{g_{0i}\, dx^i}{g_{00}}$.

◊ remarque : cette méthode de synchronisation des horloges, de proche en proche, n'est toutefois généralement pas applicable pour synchroniser dans tout l'espace (bien que ça corresponde à $dx_0 = g_{0\nu}\, dx^\nu = 0$, l'intégrale sur un contour fermé n'est pas forcément nulle car x^μ n'est pas un tenseur).

◊ remarque : les problèmes rencontrés ici, pour les distances et les décalages des horloges, peuvent être évités en utilisant un système de coordonnées tel que $g_{0i} = 0$, ce qui est toujours possible, au moins localement.

🕮 *exercices n° I, II, III et IV.*

2. Énergie-impulsion d'une particule massive

• On se base sur la “covariance” : partant du principe qu'on peut toujours, au moins localement, trouver un système de coordonnées tel que la description de relativité restreinte s'applique, puis que les changements de notations laissent invariante l'expression générale des relations ainsi obtenues.

Des justifications théoriques plus détaillées sont envisagées ensuite.

• Pour une particule massive (considérée comme ponctuelle) dont on peut négliger l'influence sur le champ de gravitation, on peut définir un 4-vecteur "énergie-impulsion" $\overleftrightarrow{P} = m\, c\, \overleftrightarrow{U}$ avec $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$.

◊ remarque : plus précisément, la notion de centre d'inertie ne peut pas être généralisée pour un système étendu ; on peut l'utiliser en bonne approximation pour une particule quasi-ponctuelle telle que g_{00} soit quasi uniforme sur tout son volume.

• En utilisant un système de coordonnées tel que $g_{0i} = 0$:

◊ on peut noter : $v^i = \frac{dx^i}{dt_{\ell oc}}$; $v = \frac{d\ell}{dt_{\ell oc}}$; $\beta = \frac{v}{c}$; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$;

◊ considérer comme "énergie" : $E = \sqrt{g_{00}}\ P^0 = m\, c^2\, \frac{dt_{\ell oc}}{d\tau} = \gamma\, m\, c^2$;

◊ et comme "impulsion" : $\vec{p} = m\, \vec{v}\, \frac{dt_{\ell oc}}{d\tau} = \gamma\, m\, \vec{v}$.

◊ remarque : plus précisément, si la base spatiale $\{\vec{e}_i\}$ est orthogonale mais non normée (en particulier pour des coordonnées de type sphérique), on utilise de préférence : $\vec{u}_i = \frac{\vec{e}_i}{\sqrt{-g_{ii}}}$; $v^i = \sqrt{-g_{ii}}\ \frac{dx^i}{dt_{\ell oc}}$ (ceci donne la même unité de longueur pour les différentes coordonnées).

◊ remarque : avec des coordonnées "quelconques", il est utile de disposer d'une expression "covariante" de l'énergie ; en notant $u^\alpha_{obs} = \frac{dx^\alpha_{obs}}{ds}$ la 4-vitesse d'un observateur, l'énergie mesurée par ce dernier (par rapport à son référentiel) peut s'écrire : $E' = \overleftrightarrow{u}_{obs} \cdot \overleftrightarrow{P}$ (cette expression reste valable pour un observateur en mouvement).

◊ remarque : en l'absence d'autres forces, mais en présence d'un champ de gravitation, cette "énergie-impulsion" n'est conservée qu'au sens de la dérivée covariante ; $\frac{d\overleftrightarrow{p}}{d\tau} \neq \overleftrightarrow{0}$ mais $\frac{D\overleftrightarrow{p}}{d\tau} = \overleftrightarrow{0}$.

◊ remarque : ces notions peuvent se généraliser pour décrire les photons.

🕮 *exercices n° V et VI.*

3. Principe d'équivalence

• Dans la théorie relativiste de la gravitation, le principe d'équivalence stipule qu'en tout point de l'espace-temps on peut choisir un système de coordonnées “localement inertiel” de façon à y “annuler” tout effet de champ de gravitation.

Soit ξ^α un tel système de coordonnées, le mouvement d'un point matériel “en chute libre” y correspond à une accélération nulle : $\frac{d^2\xi^\alpha}{dt^2} = 0$.

Considérant ces coordonnées exprimées en fonction des x^α, la propriété précédente s'écrit : $\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$.

Or, le mouvement “libre” est décrit par l'accélération nulle associée au “déplacement géodésique” : $\frac{DU^\lambda}{d\tau} = \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$. Les coordonnées inertielles sont donc déterminées par les équations : $\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\lambda}$.

◊ remarque : pour les photons $ds = 0$, donc il faut utiliser un paramètre ς autre que s ou τ .

• Au voisinage d'un point de coordonnées X^β, des coordonnées inertielles peuvent s'écrire sous forme d'un développement en série, avec les constantes $\mathcal{A}^\alpha = \xi^\alpha(X^\beta)$; $\mathcal{B}^\alpha_{\ \mu} = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}(X^\beta)$; $\mathcal{C}^\alpha_{\ \mu\nu} = \mathcal{B}^\alpha_{\ \lambda}\,\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(X^\beta)$:

$$\xi^\alpha(x^\beta) = \mathcal{A}^\alpha + \mathcal{B}^\alpha_{\ \mu}\cdot(x^\mu - X^\mu) + \frac{1}{2}\,\mathcal{C}^\alpha_{\ \mu\nu}\cdot(x^\mu - X^\mu)(x^\nu - X^\nu) + \cdots .$$

Dans cette expression, les coefficients $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ (constantes d'intégration) peuvent être choisis (arbitraire du choix des coordonnées dans le référentiel inertiel), mais les coefficients $\mathcal{C}$ sont ensuite imposés.

• Afin que le caractère inertiel des coordonnées (ici imposé en X^α) reste mieux valable au voisinage de X^α, on peut imposer en plus l'égalité des dérivées :

$$\frac{\partial^3\xi^\alpha}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu\,\partial x^\rho} = \partial_\rho\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\lambda\,\partial x^\rho} .$$

Le terme suivant du développement : $\frac{1}{6}\,\mathcal{D}^\alpha_{\ \mu\nu\sigma}\cdot(x^\mu - X^\mu)(x^\nu - X^\nu)(x^\sigma - X^\sigma)$ est donc tel que : $\mathcal{D}^\alpha_{\ \mu\nu\sigma} = \mathcal{B}^\alpha_{\ \lambda}\,\partial_\rho\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(X^\beta) + \mathcal{C}^\alpha_{\ \lambda\rho}\,\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(X^\beta)$ et ainsi de suite (tous les coefficients se calculent à partir des dérivées du tenseur métrique).

◊ remarque : ceci peut se généraliser en construisant un système de coordonnées qui sont inertielles en tout point d'une ligne.

• Dans cette interprétation, la relation $\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} = -\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\, U^\mu\, U^\nu$ suggère que c'est la connexion $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ (liée à la “courbure” de l'espace-temps) qui joue le rôle d'un “champ de gravitation” (analogue aux effets des forces électromagnétiques, exprimés en fonction du champ et de la vitesse). Le rôle d'un “potentiel de gravitation” est alors associé à la métrique $g_{\mu\nu}$ puisque la connexion s'en déduit par dérivation par rapport aux coordonnées.

• Ceci peut être justifié par des considérations théoriques associées au “principe de moindre action” $\delta\mathcal{S} = 0$.

Soit σ un paramètre décrivant l'évolution d'une particule matérielle le long de sa trajectoire, on peut considérer l'action $\mathcal{S} = \int \mathcal{L}\left(x^\mu\,,\ \frac{dx^\mu}{d\sigma}\right) d\sigma$ avec un lagrangien $\mathcal{L} = m\, c\, \frac{ds}{d\sigma}$. On peut dans ce cas choisir le paramètre $\sigma = s$, tout en considérant dans le lagrangien les variations de $ds\left(x^\mu\,,\ \frac{dx^\mu}{d\sigma}\right)$.

◊ remarque : cela s'adapte aussi pour les photons, mais le choix du paramètre est moins évident.

• En notant $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ on obtient les équations d'Euler : $\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}$ qui redonnent les équations des géodésiques.

🕮 *exercices n° VII, VIII, IX et X.*

4. Limite de l'approximation newtonienne

• On considère ici un point matériel en mouvement lent dans un champ gravitationnel faible (et statique).

Dans la limite des mouvements lents, on peut négliger U^i par rapport à U^0 ; les équations du mouvement deviennent : $\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} \approx -\Gamma^\alpha{}_{00}\,.\,(U^0)^2$.

Pour un champ statique : $\Gamma^{\alpha}_{00} = -\frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\, \partial_\beta g_{00}$; or, pour un champ faible : $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ où $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ donc au premier ordre $\Gamma^{\alpha}_{00} = -\frac{1}{2}\, \eta^{\alpha\beta}\, \partial_\beta h_{00}$. Finalement les équations s'écrivent : $\frac{d^2x^0}{d\tau^2} \approx 0$; $\frac{d^2x^i}{d\tau^2} \approx -\frac{1}{2}\, \partial^i h_{00} \,.\, (U^0)^2$.

La première équation montre que $U^0 = \frac{dx^0}{d\tau}$ est constant, ce qui permet de simplifier les autres équations sous la forme : $\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\frac{c^2}{2}\, \partial^i h_{00}$. Or, la relation newtonienne s'écrit : $\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\partial^i \mathcal{V}$ où $\mathcal{V}$ est le potentiel de gravitation.

Compte tenu du fait que l'effet gravitationnel doit tendre vers zéro à l'infini, on peut en déduire $h_{00} \approx \frac{2\,\mathcal{V}}{c^2}$ et $g_{00} \approx 1 + \frac{2\,\mathcal{V}}{c^2}$. On retrouve donc ainsi la loi gravitationnelle “classique” à partir d'une démarche géométrique.

◊ remarque : à la même approximation $g_{0i} \approx 0$ et $g_{ij} \approx \eta_{ij}$ car les termes correspondants sont du premier ordre par rapport au champ, mais aussi par rapport à la vitesse, donc sont globalement du second ordre.

🕮 *exercice n° XI.*

5. Équations électromagnétiques

• Puisque le champ électromagnétique est défini de façon invariante en relativité restreinte, on peut ici de même définir un 4-potentiel A^μ tel que le champ soit $F_{\alpha\beta} = D_\alpha A_\beta - D_\beta A_\alpha = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ (compte tenu de l'antisymétrie).

• Pour généraliser les équations de Maxwell sous forme invariante, on peut se baser sur la densité de charge $\rho = \frac{dq}{d^3\mathcal{V}}$, avec le 3-volume $d^3\mathcal{V} = \sqrt{\mathscr{g}}\, d^3x$.

Ce 3-volume $d^3\mathcal{V}$ est un scalaire pour les transformations spatiales, mais non dans les transformations spatio-temporelles. Dans ce cas l'invariant est : $d^4\mathcal{V} = c\, dt_{\ell oc}\, d^3\mathcal{V} = \sqrt{|g|}\, d^4x$, avec $dt_{\ell oc} = \sqrt{g_{00}}\, dt$; $\sqrt{|g|} = \sqrt{g_{00}}\, \sqrt{\mathscr{g}}$.

On peut alors définir un quadrivecteur densité de courant $j^\mu = \rho\, \frac{dx^\mu}{dt_{\ell oc}}$ dont (selon la métrique) la coordonnée temporelle décrit la grandeur physique associée : $\sqrt{g_{00}}\, j^0 = \sqrt{g_{00}}\, \rho\, \frac{dx^0}{dt_{\ell oc}} = \rho\, c$ (comme en relativité restreinte).

◊ remarque : on vérifie que $j^\mu = \rho \, \frac{dx^\mu}{dt_{\ell oc}}$ est un quadrivecteur en constatant que la 4-densité $\frac{dq}{d^4\mathcal{V}} = \frac{\rho}{c\, dt_{\ell oc}}$ est un scalaire, or dx^μ est un quadrivecteur ; de façon systématique, toute expression “covariante” qui redonne l'expression “classique” dans le cas de la relativité restreinte est forcément générale.

• Ce 4-vecteur vérifie l'équation de continuité : $D_\alpha j^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \, \partial_\alpha\left(\sqrt{|g|}\, j^\alpha\right) = 0$.

Par ailleurs, avec ces notations, les équations de Maxwell s'écrivent :

$D_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \, \partial_\alpha\left(\sqrt{|g|}\, F^{\alpha\beta}\right) = \mu_0 \, j^\beta$ (avec μ_0 perméabilité magnétique) ;

$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \, D_\beta F_{\gamma\delta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \, \partial_\beta F_{\gamma\delta} = 0$ (compte tenu de l'antisymétrie).

◊ remarque : dans la seconde équation, le “tenseur” de Levi-Civita $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ n'est pas un tenseur ; on peut lui préférer $\mathcal{E}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, mais cela ne change rien puisque le résultat est nul ; pour éviter toute ambiguïté, on peut préférer l'écriture développée : $\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$.

• La force électromagnétique de Lorentz se généralise alors par l'expression : $f^\alpha = m \frac{DU^\alpha}{d\tau} = m \, .\left(\frac{dU^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\ \mu\nu} \, U^\mu \, U^\nu\right) = q \, F^\alpha_{\ \mu} \, U^\mu$.

🕮 *exercice n° XII.*

6. Tenseur énergie-impulsion

• En relativité restreinte, le tenseur énergie-impulsion pour une particule de position X $\{X^\alpha\}$ et d'impulsion p^α peut s'écrire à l'aide de la distribution de Dirac, avec une masse volumique $\mu(t,\, x^i) = m \, \delta^3\left(x^i - X^i(t)\right)$:

$$T^{\alpha\beta} = p^\alpha \, \frac{dX^\beta}{dt} \, \delta^3(x^i - X^i) = \mu \, U^\alpha \, U^\beta \, \frac{d\tau}{dt} = \mu_0 \, U^\alpha \, U^\beta \ .$$

Le caractère tensoriel est assuré par le fait que $\frac{\mu}{dt} = \frac{\mu_0}{d\tau} = \frac{dm}{dt \; d^3\mathcal{V}}$ est invariant (avec μ_0 la masse volumique dans le référentiel propre).

• Pour généraliser sous forme invariante, on peut se baser sur la densité de masse $\mu = \frac{dm}{d^3\mathcal{V}}$, mais ce n'est pas un scalaire puisque l'invariant dans les transformations spatio-temporelles est $d^4\mathcal{V} = c\, dt_{\ell oc}\, d^3\mathcal{V}$.

On peut alors utiliser : $dt_{\ell oc} = \sqrt{g_{00}}\, dt$; $\frac{\mu}{c\, dt_{\ell oc}} = \frac{\mu_0}{c\, d\tau} = \frac{dm}{d^4\mathcal{V}}$ et l'expression tensorielle $T^{\alpha\beta} = \mu_0\, U^\alpha\, U^\beta$ reste valable.

• Pour une particule ponctuelle, on peut écrire : $T^{\alpha\beta} = p^\alpha \frac{dX^\beta}{dt_{\ell oc}} \tilde{\delta}^3(x^i - X^i)$ avec la distribution invariante $\tilde{\delta}^3(x^i - X^i) = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \delta^3(x^i - X^i)$.

On peut aussi utiliser : $T^{\alpha\beta} = \int m\, U^\alpha\, U^\beta\, \tilde{\delta}^4(x^\mu - X^\mu)\, d\tau$ (intégré sur la trajectoire) avec la distribution invariante $\tilde{\delta}^4(x^\mu - X^\mu) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\, \delta^4(x^\mu - X^\mu)$.

◊ remarque : contrairement à $\delta^3\left(x^i - X^i(t)\right)$, le temps est une variable “indépendante” dans $\delta^4(x^\mu - X^\mu)$.

• Selon la métrique, la coordonnée temporelle décrit la grandeur physique associée : $g_{00}\, T^{00} = g_{00}\, \mu \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{dt_{\ell oc}} = \gamma\, \mu\, c^2$.

Les coordonnées spatio-temporelles décrivent les grandeurs physiques associées : $\sqrt{g_{00}}\ T^{i0} = \sqrt{g_{00}}\ \mu\, U^i \frac{dx^0}{dt_{\ell oc}} = \gamma\, \mu\, c\, v^i$.

On peut donc les regrouper et les réinterpréter comme un pseudo-4-vecteur $\sqrt{g_{00}}\, T^{\alpha 0}$ représentant une “3-densité de 4-impulsion” $\mu\, c\, U^\alpha$.

Il ne s'agit toutefois pas d'un 4-vecteur car μ n'est pas un scalaire, à cause de la contraction relativiste des volumes.

• En pratique, ceci revient à décrire l'énergie-impulsion d'une petite particule par : $P^\alpha = c\, p^\alpha = \int T^{\alpha 0} \sqrt{|g|}\, d^3x = \int \sqrt{g_{00}}\ T^{\alpha 0}\, d^3\mathcal{V}$; ceci ne peut toutefois pas se généraliser à un système de grande taille.

Pour un volume non quasi-ponctuel, si on reste dans une généralisation simple de la relativité restreinte, il serait absurde de calculer la somme $\int \sqrt{g_{00}}\ T^{\alpha 0}\ d^3\mathcal{V}$ car la composante temporelle représenterait la quantité $\langle\sqrt{g_{00}}\rangle \int \sqrt{g_{00}}\ T^{00}\ d^3\mathcal{V} \neq \int g_{00}\ T^{00}\ d^3\mathcal{V}$. Ceci est associé au fait que la notion de centre d'inertie ne se généralise pas au delà de la relativité restreinte : il faut raisonner <u>localement</u>, directement avec des densités de 4-impulsion et des densités de forces pour les systèmes non ponctuels.

◊ remarque : par rapport au cas newtonien, la relativité restreinte prend en compte l'inertie associée à l'énergie cinétique ; il faut ici prendre en compte l'énergie gravitationnelle (l'inertie dépend du champ où se trouve le système).

🕮 *exercices n° XIII, XIV et XV.*

7. <u>Moment cinétique et “spin” (moment cinétique propre)</u>

• La notion de moment cinétique peut se généraliser :

- ◊ soit pour un système macroscopique possédant des symétries bien particulières (ceci nécessite une étude du tenseur $T^{\mu\nu}$ décrivant la répartition d'énergie-impulsion, ainsi que de la métrique $g_{\mu\nu}$ associée) ;
- ◊ soit pour une particule ponctuelle, mais alors il est inutile d'écrire une équation supplémentaire car elle peut se déduire de la loi précédente.

• Par contre, la notion de “spin” peut aussi se généraliser dans l'approximation d'une particule (quasi) ponctuelle ; elle peut servir par exemple à décrire le comportement d'un gyroscope sous l'effet de la gravitation.

En pratique, ceci revient à décrire le moment cinétique d'une petite particule par : $L^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \int \left(x^\alpha\, T^{\beta 0} - x^\beta\, T^{\alpha 0}\right) \sqrt{|g|}\ d^3x = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}}\ \left(x^\alpha\, T^{\beta 0} - x^\beta\, T^{\alpha 0}\right) d^3\mathcal{V}$.

On peut alors définir le vecteur “spin” $S_\alpha = \frac{1}{2}\ \mathcal{E}_{\alpha\beta\mu\nu}\ L^{\beta\mu}\ u^\nu$, où $u^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}$ est la “vitesse du système” (de son pseudo centre d'inertie) et avec le pseudo-tenseur $\mathcal{E}_{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{|g|}\ \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$.

• En mouvement inertiel, le spin S^α d'une particule évolue selon $\frac{DS^\alpha}{d\tau} = 0$, donc : $\frac{dS^\alpha}{d\tau} = -\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\ S^\mu\ U^\nu$.