EFFETS DE LA ROTATION D'UN ASTRE - exercices

I. Trajectoires des particules matérielles dans le plan équatorial

1. • La loi radiale peut s'écrire $\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{2}c^2.(\mathcal{k}^2 - 1) - \mathcal{V}_r$ avec un “potentiel radial” :

$$\mathcal{V}_r = -\frac{c^2\, r_s}{2\, r} + \frac{\hbar^2 - c^2\, \alpha^2.(\mathcal{k}^2 - 1)}{2\, r^2} - \frac{r_s.(\hbar - c\, \alpha\, \mathcal{k})^2}{2\, r^3} .$$

• Retrouver les types de trajectoires en fonction de $\hbar$ pour α et $\mathcal{k}$ fixés (un bon choix caractéristique peut être $\frac{\alpha}{r_s} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\mathcal{k} \approx 0{,}95$).

2. • Retrouver les types de trajectoires en fonction de $\mathcal{k}$ pour α et $\hbar$ fixés (un bon choix caractéristique peut être $\frac{\alpha}{r_s} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\frac{\hbar}{c\, r_s} = \pm 1{,}8$).

3. • Montrer qu'il existe une valeur minimale de $|\hbar|$ (dépendant du sens de rotation) en dessous de laquelle il ne peut pas exister d'extremums de $\mathcal{V}_r$.

II. Notion de “verticale”

• On considère un véhicule spatial se maintenant immobile (par un procédé quel qu'il soit) dans une position voisine d'un astre décrit par la métrique de Kerr.

• Dans ce véhicule, un astronaute suspend un fil à plomb afin de déterminer la direction “verticale”.

1. a) Écrire les équations du “mouvement” pour le point matériel suspendu, soutenu par la force de tension du fil.
   b) Exprimer la quadri-vitesse du point matériel suspendu.

2. • Déterminer les composantes de la force de tension du fil, dans le cas général et dans le cas particulier du plan équatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3. • Commenter les résultats précédents du point de vue des conséquences de l'effet Lense-Thirring.

III. Effet Lense-Thirring

1. • On étudie les trajectoires de photons partant de l'infini et arrivant sur un trou-noir en rotation.
   a) Écrire les équations du mouvement correspondant.
   b) Préciser la variable généralement utilisée pour paramétrer la trajectoire des photons.
   c) Écrire l'équation d'évolution associée à $x^0 = c\, t$.
   d) Écrire l'équation d'évolution associée à $x^3 = \varphi$.
   e) Combiner les deux relations précédentes pour obtenir les équations d'évolution de $c\, t$ et φ .
   f) Écrire l'équation d'évolution de $x^1 = r$.

2. a) Déduire de ce qui précède une expression de $\frac{d\varphi}{dr}$.
   b) En déduire une méthode pour obtenir numériquement puis représenter graphiquement $\varphi(r)$.
   c) À l'aide de cette méthode, calculer puis représenter $\varphi(r)$ pour quelques cas particuliers caractéristiques.

IV. Précession géodésique

• On considère un satellite, en orbite circulaire autour de la Terre, à bord duquel se trouve un gyroscope (soigneusement isolé des effets parasites électriques et magnétiques). On étudie l'évolution de l'orientation du spin S^α du gyroscope. Pour tenir compte (au moins approximativement) de l'effet de rotation de la Terre sur elle même, on raisonne avec la métrique de Kerr. Pour simplifier les notations, on considère que l'orbite est dans le plan équatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$.

◊ remarque : l'effet Einstein-de Sitter décrit ici est parfois nommé “précession géodétique”, par traduction anormale du terme anglais “geodetic”, signifiant “géodésique”.

1. • Le gyroscope (comme le satellite) peut être considéré comme évoluant sous le seul effet de la gravitation ; écrire la forme générale des équations d'évolution de son spin.

2. a) Les équations précédentes dépendant du mouvement du satellite, écrire la forme générale des équations du mouvement (sans supposer tout de suite le mouvement circulaire).

b) Intégrer les équations pour $x^0 = c\,t$ et $x^3 = \varphi$; noter $\mathscr{k}$ et $\mathscr{h}$ les constantes d'intégration décrivant respectivement l'énergie mécanique et le moment cinétique.

c) Montrer qu'on obtient l'équation pour $x^1 = r$ d'après la métrique (plus simplement qu'en intégrant). Exprimer le résultat à l'aide de $\mathscr{k}$ et $\mathscr{h}$.

d) Dans le cas du mouvement circulaire étudié, en déduire $\mathscr{k}$ et $\mathscr{h}$ en fonction du rayon r.

e) En déduire la vitesse angulaire $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$ en fonction du rayon de l'orbite.

f) Montrer que la 4-vitesse $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ peut s'écrire $U^\alpha = \dot{t}\,.(c,\ 0,\ 0,\ \Omega)$; exprimer $\dot{t}$ en fonction de r.

3. a) Préciser les équation décrivant l'évolution de S^0, S^1, S^2 et S^3 ; vérifier que S^2 reste constante et n'influe pas sur les autres composantes.

b) Montrer qu'on est ramené à un système de trois équations couplées sur S^0, S^1 et S^3.

c) Résoudre ce système en supposant que le spin est initialement selon l'orientation radiale sortante.

d) Vérifier que l'évolution conserve $\|S\|^2 = Cste$.

e) Interpréter le résultat ; justifier qu'il décrit une précession du spin.

f) Tester l'orthogonalité entre S^α et U^α ; commenter.

4. a) Calculer l'angle de précession pour une période du satellite, puis calculer la vitesse angulaire de précession.

b) Comparer ces résultats à ceux obtenus avec la métrique de Schwarzschild.

c) Effectuer l'application numérique (correspondant au satellite “gravity probe B”).

◊ données : rayon de Schwarzschild de la Terre : $r_s \approx 8{,}9\ \mathrm{mm}$;
rayon de la Terre : $R_T \approx 6400\ \mathrm{km}$;
rayon de l'orbite du satellite (de faible altitude) : $r \approx 7000\ \mathrm{km}$.

V. Effet Doppler et vitesse des étoiles dans une galaxie

• On considère des étoiles en orbite circulaire autour du centre d'une galaxie. En observant depuis la Terre (≈ à l'infini), on souhaite utiliser l'effet Doppler pour étudier la vitesse de rotation de ces étoiles, en fonction de leur distance au centre de la galaxie. Pour tenir compte (au moins approximativement) de l'effet de rotation du centre galactique sur lui même, on raisonne avec la métrique de Kerr. Pour simplifier les notations, on considère des orbites dans le plan équatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$.

1. • On considère les trajectoires des photons dans le plan équatorial.

a) Écrire (de façon générale) les équations permettant de décrire le mouvement des photons.

b) Rappeler le paramètre ς permettant de paramétrer le mouvement des photons.

c) Préciser l'équation pour $x^0 = c\,t$.

d) Préciser l'équation pour $x^3 = \varphi$.

e) En déduire les expressions de $c\,\dot{t}$ et $\dot{\varphi}$.

f) Préciser l'équation pour $x^1 = r$.

g) Déterminer la relation caractérisant le minimum d'approche (on ne s'intéresse qu'au photons pour lesquels un tel minimum existe).

h) En reportant, préciser $c\,\dot{t}$ et $\dot{\varphi}$ pour les photons émis tangentiellement par les étoiles en orbite circulaire ; rappeler comment utiliser ces quantités pour exprimer l'énergie-impulsion des photons.

2. • Pour exploiter l'effet Doppler, il est nécessaire de le distinguer de l'effet Einstein.

a) Relier l'énergie des photons vue à l'infini à celle correspondant à un émetteur fixe.

b) Étudier de même le cas d'un émetteur en co-rotation avec la métrique de Kerr.

c) Pour séparer l'effet Einstein, proposer une moyenne des signaux émis dans les deux sens.

3. • On considère les trajectoires des étoiles (décrites comme points matériels) dans le plan équatorial.

a) Exprimer les équations du mouvement pour $x^0 = c\,t$ et $x^3 = \varphi$.

b) En déduire les expressions de $c\,\dot{t}$ et $\dot{\varphi}$.

c) Exprimer l'équation pour $x^1 = r$.

d) Rappeler pourquoi le fait de considérer des trajectoires circulaires impose les valeurs des deux constantes d'intégration intervenant dans les équations précédentes (ici avec la variable de Binet $u = \frac{1}{r}$) :

$$\mathcal{k} = \frac{2-2\,r_s\,u \pm \alpha\,u\,\sqrt{2\,r_s\,u}}{\sqrt{2\left(2-3\,r_s\,u \pm 2\,\alpha\,u\,\sqrt{2\,r_s\,u}\right)}} \quad ; \quad \frac{\hbar}{c} = \pm\frac{\sqrt{r_s}}{\sqrt{u}}\,\frac{1 \mp 2\,\alpha\,u\,\sqrt{2\,r_s\,u} + \alpha^2\,u^2}{\sqrt{2-3\,r_s\,u \pm 2\,\alpha\,u\,\sqrt{2\,r_s\,u}}}\,.$$

e) Exprimer la “vitesse de rotation” $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$ des étoiles sur leur orbite.

f) Exprimer la quadri-vitesse u^β des étoiles sur leur orbite.

4. • On considère les photons émis par les étoiles d'une galaxie.

a) Relier l'énergie des photons vue à l'infini à celle correspondant à l'émission par une des étoiles.

b) Pour séparer l'effet Einstein, proposer une moyenne des signaux émis dans les deux sens.

c) Utiliser cette estimation pour mettre en évidence l'effet Doppler ; commenter.