

Poussée d'ARCHIMÈDE et objet mobile

par Jean-Michel LAFFAILLE

Lycée Henri Bergson - 49000 Angers

laffaille.j-m.edu@orange.fr

RÉSUMÉ

Quelques critiques semblent nécessaires à propos de l'enseignement de la poussée d'ARCHIMÈDE, dès lors qu'on l'applique à un solide en mouvement accéléré par rapport au fluide. Non seulement la justification « classique » ne s'applique pas dans ce cas, mais certaines conclusions qui en sont déduites sont incorrectes (entre autres dans des épreuves du baccalauréat), car il faut ajouter un effet inertiel supplémentaire généralement ignoré.

INTRODUCTION

Enseignant en première année d'études supérieures, je propose généralement à mes étudiants, au début de l'année scolaire, un premier devoir issu des épreuves récentes du baccalauréat. Il y a deux ou trois ans, mon attention s'est ainsi portée sur un exercice concernant le vol d'un ballon-sonde [1]. J'avais déjà (et de la même manière) traité cette sorte d'exercices lorsque j'étais étudiant ; cela fait longtemps que je n'y avais plus réfléchi.

Il se trouve qu'à cette occasion (quelques années d'expérience en plus faisant effet ?), la façon de traiter le problème m'a semblé anormale. La masse pesante du fluide était prise en compte, mais non sa masse inerte (les données « expérimentales » de l'énoncé sont visiblement calculées d'après une théorie... à mon avis incorrecte).

1. APPROCHE THÉORIQUE SIMPLE

1.1. Bilan des forces dans l'enseignement secondaire

J'ai alors consulté quelques livres de cours de terminale S [2] et constaté que la difficulté provenait de l'enseignement secondaire.

Un solide de masse m en mouvement de chute accélérée dans un fluide, sous l'effet de la pesanteur, y est généralement considéré comme soumis :

- ♦ à son poids $\vec{P} = m \vec{g}$;
- ♦ à la poussée d'ARCHIMÈDE $\vec{F}_A = -m_d \vec{g}$ (ou m_d est la masse de fluide « déplacé » par la présence du solide) ;

- ◆ à un frottement fluide laminaire $\vec{f} = -k \vec{v}$ ou turbulent $\vec{f} = -k v \vec{v}$ (proportionnel à la vitesse ou à son carré).

1.2. Poussée d'ARCHIMÈDE

Dans le cas d'un solide en équilibre dans un fluide, la poussée d'ARCHIMÈDE ne peut pas être aisément justifiée par le calcul explicite de la somme des forces pressantes sur la surface du solide (trop compliqué à ce niveau).

On peut toutefois l'interpréter simplement en considérant l'équilibre d'un corps plongé dans un fluide et soumis à la pesanteur.

En l'absence du corps étudié, la quantité de fluide qui occuperait le même volume serait en équilibre : $\vec{F}_A + \vec{P}_A = \vec{0}$, donc la somme des forces pressantes qu'elle subirait serait l'opposé de son poids (cf. figure 1).

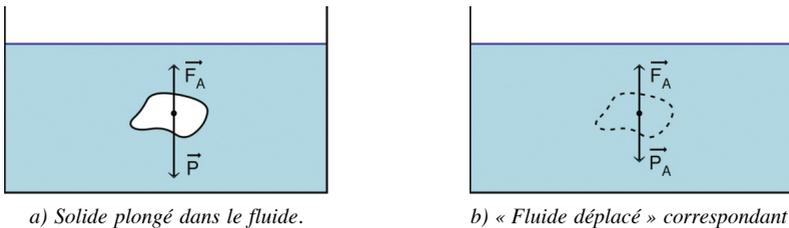


Figure 1 : Comparaison de la somme des forces pressantes.

L'hypothèse la plus simple est que les forces pressantes exercées dans le fluide sont indépendantes de la nature de l'objet sur lequel elles s'exercent (si on met à part d'éventuelles tensions superficielles). Dans ce cas, la somme des forces pressantes subies par le corps plongé dans le fluide, nommée « poussée d'ARCHIMÈDE », est égale à l'opposé du poids du fluide « déplacé ».

Remarque : L'expression « fluide déplacé » désigne la quantité de fluide à la place duquel se trouve le corps étudié ; il ne s'agit pas de fluide en mouvement puisqu'on raisonne sur un équilibre.

Un autre raisonnement est envisageable avec l'énergie potentielle de pesanteur : lorsque, dans le fluide, on fait varier l'altitude du corps étudié, cela provoque un déplacement inverse d'un volume de fluide équivalent (cf. figure 2, page ci-contre).

L'énergie potentielle de pesanteur du fluide subit une variation : $\Delta E_{pA\text{fluide}} = -m_d g \Delta z$ (où Δz correspond au déplacement du solide). Cette variation d'énergie potentielle est causée par le travail des forces pressantes subies par le fluide ; or ce travail se limite à la zone où il y a déplacement, c'est-à-dire à la surface du solide ; ceci correspond donc à l'action réciproque de la poussée d'ARCHIMÈDE. Le théorème de l'énergie mécanique

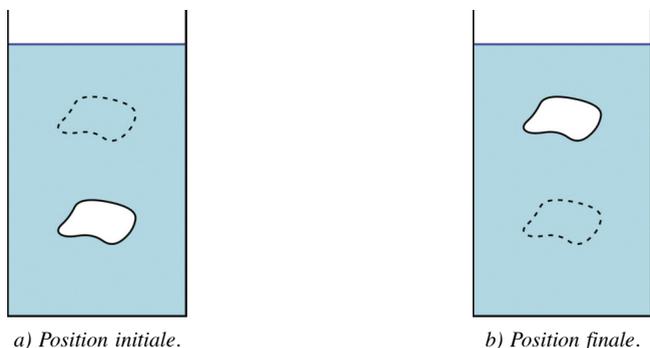


Figure 2 : Comparaison des énergies potentielles.

(pour un fluide parfait) donne alors : $\Delta E_{pA\text{fluide}} = W(-\vec{F}_A)$.

Inversement, le travail effectué par la poussée d'ARCHIMÈDE dérive forcément d'une énergie potentielle telle que : $\Delta E_{pA\text{solide}} = -W(\vec{F}_A) = -m_d g \Delta z$ (d'après la définition de l'énergie potentielle). La poussée d'ARCHIMÈDE correspond donc à une force opposée au poids du fluide déplacé : $\vec{F}_A = -\vec{\nabla}(-m_d g z) = -m_d \vec{g}$.

Remarque : Ce type de raisonnements considère un fluide idéal et ignore les frottements ; en fait, il ne concerne que la différence entre deux états et est indépendant de la vitesse du déplacement ; ainsi, puisque le travail des frottements tend vers zéro au moins comme la vitesse (en v ou v^2), on peut toujours appliquer ces raisonnements dans la limite des faibles vitesses ; il suffit ensuite de rajouter l'effet des éventuels frottements s'ils ne sont pas négligeables.

Il est ici intéressant de remarquer qu'on peut se limiter à une simple permutation du solide et du fluide déplacé, ou envisager de mouvoir toute la colonne de fluide entre les deux positions extrêmes. Le résultat est identique, car en moyenne, pour obtenir le même effet global, le déplacement de chaque particule de fluide est d'autant plus petit que la quantité déplacée est grande.

Ceci est en rapport direct avec le dispositif nommé « machine d'ATWOOD » (cf. figure 3) ; du fait de la présence du « contreponds », le mouvement du mobile de masse m peut être décrit par une équation différentielle où intervient une masse pesante $m - m'$. Il en est alors de même pour les variantes du dispositif dans lesquelles on augmente la masse du

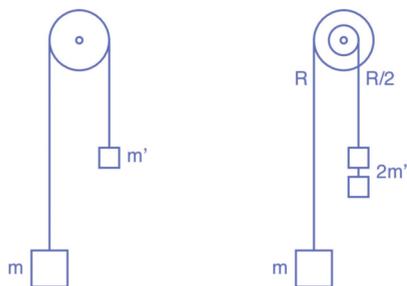


Figure 3 : Machine d'ATWOOD (et variante).

contreponds en diminuant d'autant son déplacement.

1.3. Cas d'un solide en mouvement

Lorsque le solide étudié est en mouvement, mais avant même d'envisager des frottements, les raisonnements précédents suggèrent que la « poussée d'ARCHIMÈDE » est différente (si on continue à nommer ainsi la somme des forces pressantes) ou bien qu'il faut lui ajouter un terme supplémentaire :

- ◆ la méthode des forces doit faire intervenir l'accélération du fluide ;
- ◆ la méthode de l'énergie doit considérer l'énergie cinétique du fluide.

Remarque : On peut se demander si l'interaction avec le fluide déplacé n'est pas ce qui constitue le « frottement » ; c'est entre autres cela (compte tenu de la viscosité ou des turbulences), mais non uniquement, car le frottement dans le fluide correspond à un terme proportionnel à la vitesse ou à son carré, alors que le terme envisagé ici est proportionnel à l'accélération (forcément prépondérant au démarrage à vitesse nulle).

Pour un solide en translation rectiligne à la vitesse \vec{v} dans un fluide, la prise en compte de l'inertie de ce dernier revient à ajouter une force de « traînée dynamique » $\vec{F}_D = -m_e \vec{a}$, où m_e est une « masse équivalente » de fluide entraînée à la vitesse $-\vec{v}$ par le mouvement du solide (cf. annexe 1).

Le calcul complet en mécanique des fluides n'étant pas simple, on peut l'expliquer à l'aide de l'analogie avec la machine d'ATWOOD. On choisit ici la description par l'énergie.

Dans le dispositif de base (où la masse m' remonte à la vitesse $-\vec{v}$ quand la masse m descend à la vitesse \vec{v}) l'énergie cinétique du système est $E_{c\text{tot}} = \frac{1}{2} (m + m') v^2$.

L'énergie potentielle étant $E_{p\text{tot}} = mgz + m'gz'$, la conservation de l'énergie mécanique (pour une poulie idéale) peut donner l'équation du mouvement en dérivant par rapport au temps, puis en simplifiant par v (non nulle lors du mouvement) :

$$0 = (m + m') a + (m - m') g.$$

Pour la variante du dispositif où un contreponds de masse double se déplace de moitié, il faut par contre tenir compte de sa vitesse $-\frac{1}{2} \vec{v}$: $E_{c\text{tot}} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{2} m' \right) v^2$. On aboutit alors de façon analogue à l'équation du mouvement :

$$0 = \left(m + \frac{1}{2} m' \right) a + (m - m') g.$$

Ainsi, contrairement à la masse pesante, la contribution du contreponds à la masse inerte équivalente dépend de la répartition de masse.

Dans le cas du fluide, l'énergie cinétique dépend notablement de la quantité de fluide

mis en mouvement et du détail des lignes de courant : on est conduit à faire intervenir dans le terme d'inertie une « masse équivalente » de fluide mis en mouvement $m_e = \beta m_d$ où le coefficient β tient compte globalement de ces effets.

Pour une boule en mouvement rectiligne dans un fluide parfait, on peut montrer (le calcul n'est pas simple [3] ; cf. annexe 1) que cette « masse équivalente » est $m_e = \frac{1}{2} m_d$.

Le calcul théorique pour un fluide réel est nettement plus complexe, mais de nombreux arguments indiquent que le modèle du fluide parfait donne une bonne description hors de la couche limite (au voisinage immédiat du solide) et conduit à une estimation correcte de la résultante des forces pressantes [3-4].

2. APPROCHE EXPÉRIMENTALE

2.1. Frottement laminaire ou turbulent

Est-il possible qu'une interprétation incomplète soit enseignée ainsi ? Est-il au contraire possible que dans les cas considérés $m_e \ll m_d$ et que l'effet soit de ce fait négligeable ?

Par curiosité, j'ai donc refait l'expérience avec des balles de golf en chute verticale dans l'eau, filmées par une webcam (et/ou un appareil photo numérique) à trente images par seconde.

Pour comparer expérience et théorie, il faut savoir si le frottement est plutôt laminaire ou turbulent. Le nombre de REYNOLDS R_e délimite alors les régimes :

- ◆ laminaire réversible pour $R_e < 1$;
- ◆ laminaire non réversible pour $2 < R_e < 1000$;
- ◆ turbulent pour $R_e > 2000$.

On peut considérer par exemple :

- ◆ la masse $m = 46,5$ g et le rayon $r = 21,35$ mm ;
- ◆ la masse d'eau déplacée $m_d = 40,8$ g ;
- ◆ le poids diminué de la poussée d'ARCHIMÈDE $P' = 55,9$ mN.

Pour l'hypothèse laminaire :

- ◆ la viscosité (dynamique) de l'eau est $\eta = 0,001$ Pa · s ;
- ◆ le frottement visqueux sur une sphère $f = 6\pi r \eta v$;
- ◆ la vitesse limite (pour une sphère) serait $v = \frac{P'}{6\pi r \eta} \approx 140$ m · s⁻¹ ;
- ◆ le nombre de REYNOLDS serait $R_e = \frac{\rho r v}{\eta} \approx 2 \cdot 10^6 \gg 2000$ (contradictoire).

Pour l'hypothèse turbulente :

- ◆ le frottement turbulent sur une sphère $f = \frac{1}{2} C_x S \rho v^2$ avec $C_x \approx 0,5$;
- ◆ la vitesse limite (pour une sphère) serait $v = \sqrt{\frac{2P'}{C_x S \rho}} \approx 0,56 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- ◆ le nombre de REYNOLDS serait $R_e = \frac{\rho r v}{\eta} \approx 12000 > 2000$ (cohérent).

Remarque : On peut se demander s'il est pertinent de choisir une balle de golf, dont les alvéoles sont justement conçues pour diminuer la force de traînée en créant une couche limite turbulente ; en pratique, cet effet n'intervient que pour $R_e > 5 \cdot 10^4$ (à comparer à $5 \cdot 10^5$ pour une balle lisse [4]) et cette limite n'est pas atteinte dans le cas étudié (en outre, l'effet se résumerait à une valeur plus faible du coefficient C_x) ; ceci est d'ailleurs confirmé par l'observation du mouvement d'une balle de golf « lissée » (cf. annexe 2).

2.2. Courbes pour un frottement laminaire

Avec un axe vertical (Oz) orienté vers le bas (on peut noter $m_e = \beta m_d$ pour simplifier certaines expressions) :

$$(m + m_e) \frac{dv}{dt} = (m - m_d) g - \lambda_1 v$$

avec :
$$\lambda_1 = 6\pi r \eta.$$

L'intégration donne :
$$v(t) = v_1 \cdot (1 - e^{-\alpha_1 t})$$

avec :
$$v_1 = \frac{(m - m_d) g}{\lambda_1} \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \frac{\lambda_1}{m + \beta m_d}.$$

Lors du début du mouvement : $v(t) \approx g' t$ (tangente à l'origine) avec une accélération : $g' = \alpha_1 v_1 = \frac{m - m_d}{m + \beta m_d} g.$

Dans la partie suivante, on vérifie que le frottement turbulent donne le même résultat ; c'est d'une part logique puisque ça correspond à une situation où les frottements sont négligeables, c'est d'autre part nécessaire pour justifier qu'on utilise un modèle turbulent même aux plus faibles vitesses où cela est moins justifié, d'autant plus que c'est au début que l'effet étudié est prépondérant.

2.3. Courbes pour un frottement turbulent

L'équation différentielle du mouvement s'écrit dans ce cas, $\lambda_2 = \frac{1}{2} C_x S \rho$:

$$(m + m_e) \frac{dv}{dt} = (m - m_d) g - \lambda_2 v^2.$$

L'intégration donne : $v(t) = v_2 \operatorname{th}(\alpha_2 v_2 t)$

avec :
$$v_2 = \sqrt{\frac{(m - m_d)g}{\lambda_2}} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{m + \beta m_d}.$$

Lors du début du mouvement : $v(t) \approx g't$ (tangente à l'origine) avec une accélération : $g' = \alpha_2 v_2^2 = \frac{m - m_d}{m + \beta m_d} g$ (identique à celle obtenue dans la partie précédente et où la valeur du coefficient C_x n'intervient pas).

2.4. Mesures

Différentes séries de mesures ont été effectuées (cf. figure 4), avec des balles de masses et rayons légèrement différents, dans des cuves cylindriques différentes : de hauteur 30 cm et de diamètre 10 cm (cf. figure 4a) et 30 cm (cf. figures 4b et 4c, page ci-après).

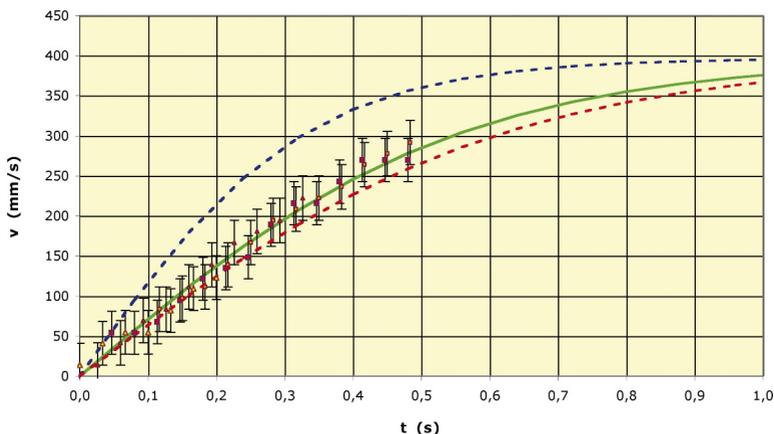


Figure 4a

Les ajustements (par la méthode du χ^2) donnent tous $C_x \approx 0,5 \pm 0,1$ (imposé par la vitesse limite) ; ceci correspond aux valeurs généralement admises pour une sphère (cf. annexe 2).

On obtient en outre $\beta \approx 0,5 \pm 0,3$ (imposé par la tangente à l'origine) ; bien que les mesures semblent ainsi conforter l'effet non négligeable de l'inertie du fluide, les incertitudes expérimentales restent grandes.

Remarque : Compte tenu des incertitudes, la différence entre 4a et 4c n'est pas assez significative pour affirmer que β diminue (de 0,8 à 0,5) quand le diamètre du tube augmente ; de même, la différence entre 4b et 4c ne suffit pas pour affirmer que β augmente (de 0,2 à 0,5) quand la vitesse limite (dépendant de la masse de la balle) augmente.

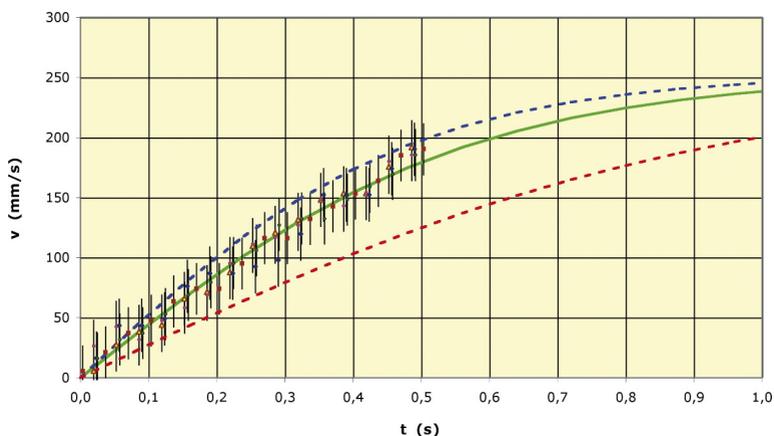


Figure 4b

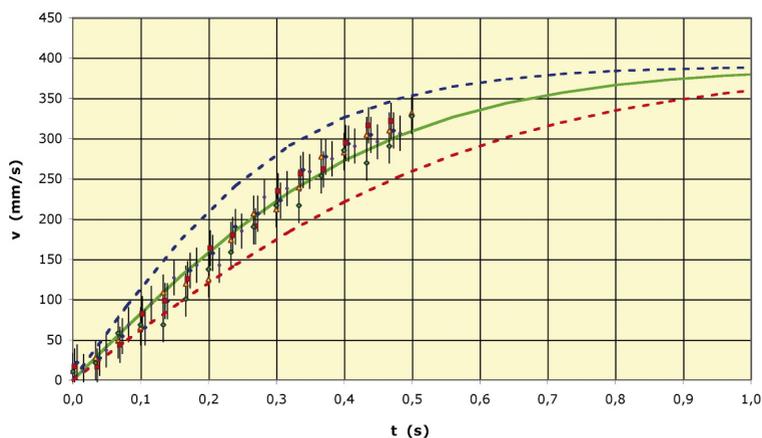


Figure 4c

Figures 4 : Évolution temporelle de la norme de la vitesse

(les limites correspondant à $\beta = 0$ et $\beta = 1$ sont indiquées en pointillés respectivement bleus et rouges).

CONCLUSION

Il apparaît que, pour décrire les actions subies par un solide plongé dans un fluide, la description théorique utilisée dans l'enseignement secondaire est incomplète.

Remarque : La difficulté est souvent esquivée en première année d'enseignement supérieur, car on s'y intéresse plus à la résolution d'équations différentielles et on considère usuellement un frottement théorique « de type » fluide sans préciser les détails pratiques de sa réalisation (par contre généralement incontournable en TP).

En plus de la poussée d'ARCHIMÈDE (justifiée dans le cas statique) et du frottement fluide (laminaire ou turbulent), une force de traînée dynamique non négligeable intervient pendant l'approche de la vitesse limite : $\vec{F}_D = -m_e \vec{a}$.

Le fait que l'expression générale de cette force soit mal connue (à cause d'un coefficient m_e pouvant dépendre notablement des conditions d'écoulement du fluide) n'est pas une justification pour l'escamoter : il en est de même du coefficient C_x pour le frottement turbulent.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] « Exercice II, Mécanique du vol d'un ballon-sonde », sujet obligatoire de physique-chimie du baccalauréat général, série S, juin 2004, imprimé 4PYOSME1 (sur la courbe de variation de la vitesse, la pente de la tangente à l'origine est incompatible avec la valeur prenant en compte l'inertie du fluide).
- [2] *Physique - Term S*, collection Durandeu », éditions Hachette Éducation, avril 2002, chap. 10, p. 208.
- [3] LANDAU L. et LIFCHITZ E., *Mécanique des fluides*, éditions Mir.
- [4] BRÉBEC J.-M., *H-Prépa - Mécanique des fluides*, éditions Hachette.
- [5] BASS J., *Cours de mathématiques*, éditions Masson, 1968, tome II.



Jean-Michel LAFFAILLE
Professeur de sciences physiques en MPSI
 Lycée Henri Bergson
 Angers (Maine-et-Loire)

Annexe 1

Calcul de la force de traînée subie dans un fluide par un solide accéléré

Une boule de rayon R se déplace en mouvement rectiligne, avec une vitesse \vec{v} , dans un fluide parfait incompressible. On désire étudier l'écoulement du fluide, supposé en régime laminaire, en décrivant son champ de vitesse \vec{v} à l'aide d'un potentiel Φ , puis l'influence réciproque du fluide sur la boule.

À condition d'en tenir compte de façon appropriée, on peut décrire le potentiel selon un repère mobile associé aux coordonnées sphériques centrées sur la boule (en mouvement), avec un axe polaire orienté selon \vec{v} .

Le fluide incompressible, caractérisé par $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, peut être décrit par un écoulement potentiel : $\vec{v} = -\vec{\nabla}(\Phi)$ avec $\Delta\Phi = 0$.

Puisque l'équation est linéaire, on peut chercher à décomposer une solution quelconque sous forme de superposition de solutions particulières. La forme de la boule conduit à raisonner en coordonnées sphériques, les solutions particulières peuvent alors être recherchées sous la forme $\Phi(r, \theta, \varphi) = f(r) \cdot Y(\theta, \varphi)$ (où les fonctions Y sont nommées « harmoniques sphériques ») [5].

En reportant dans l'expression du laplacien, on peut séparer les variables :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} &= 0 ; \\ Y \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) + f \cdot \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right) &= 0 ; \\ \frac{1}{f} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) &= - \frac{1}{Y} \cdot \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right). \end{aligned}$$

Puisque le membre de gauche dépend seulement de r et celui de droite seulement des angles, il ne peut s'agir que d'une constante, par exemple λ , d'où les équations suivantes

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df(r)}{dr} \right) - \lambda f(r) = 0 \quad ; \quad \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0.$$

L'équation radiale : $r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} - \lambda f = 0$ est linéaire ; on peut chercher une

solution particulière sous la forme r^α , ce qui impose : $\alpha \cdot (\alpha - 1) + 2\alpha - \lambda = 0$; la constante α est ainsi solution de : $\alpha \cdot (\alpha + 1) = \lambda$.

Puisque la somme des racines est -1 , si on note α la première, la seconde est $-(\alpha - 1)$. On peut donc écrire la solution générale sous la forme : $f(r) = A r^\alpha + \frac{B}{r^{\alpha+1}}$ (où A et B sont deux constantes).

Remarque : C'est bien la solution générale puisque l'équation est du second ordre et qu'il y a deux constantes d'intégration.

En outre, la vitesse du fluide doit s'annuler à l'infini, donc il faut se limiter aux exposants strictement négatifs.

La résolution de l'équation angulaire montre que l'effet des angles peut s'exprimer à l'aide des polynômes de LEGENDRE, mais on ajoute ici un autre argument.

On envisage en pratique un régime laminaire ; l'écoulement envisagé correspond logiquement aux faibles vitesses, avec un potentiel linéaire en fonction de \vec{v} .

En l'absence de pesanteur (dont l'effet peut être ajouté ensuite), la seule façon d'obtenir un potentiel scalaire, linéaire en \vec{v} et de dépendance radiale en $\frac{1}{r^{\alpha+1}}$, consiste à supposer Φ proportionnel à $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^\alpha} \right)$.

En présence de pesanteur, l'équation différentielle étant linéaire, on serait de même amené à ajouter un terme linéaire en \vec{g} , donc proportionnel à $\vec{g} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^\alpha} \right)$. Mais un tel terme décrirait un effet de chute d'ensemble du fluide, non pertinent si ce dernier est contenu dans un récipient limité : il apparaît une surpression, conforme à la loi d'ARCHIMÈDE et compensant la pesanteur (la somme des deux effets a une influence nulle sur l'écoulement du fluide).

À la surface de la boule, la composante radiale de la vitesse du fluide doit être égale à celle du solide : à l'avant, la boule pousse le fluide ; à l'arrière, il n'y a pas d'espace vide entre la boule et le fluide. Ceci peut s'écrire : $\vec{v} \cdot \vec{u}_r = \vec{v} \cdot \vec{u}_r$.

Remarque : Par contre, les composantes tangentielles ne sont généralement pas égales ; le fluide parfait peut « glisser » le long de la surface du solide (contrairement au fluide réel, pour lequel le « raccordement » se fait dans la couche limite).

La forme obtenue pour le potentiel varie comme $\cos(\theta)$ et est indépendante de φ .

Or, l'équation angulaire s'écrit : $\frac{1}{Y} \cdot \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right) = -\lambda$.

En cherchant les solutions sous la forme $Y(\theta, \varphi) = F(\theta) \cdot G(\varphi)$ on peut séparer les variables : $\frac{1}{F} \cdot \left(\sin(\theta) \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{dF}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2(\theta) F \right) = -\frac{1}{G} \cdot \frac{d^2 G}{d\varphi^2} = \lambda_\varphi$.

Les solutions périodiques de $\frac{d^2 G}{d\varphi^2} + \lambda_\varphi G = 0$ sont en $\cos(\sqrt{\lambda_\varphi} \varphi)$ ou $\sin(\sqrt{\lambda_\varphi} \varphi)$; mais on obtient ici une indépendance par rapport à φ , ce qui correspond à $\lambda_\varphi = 0$.

Ceci impose donc $\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{dF}{d\theta} \right) + \lambda F = 0$, ou avec les notations $\zeta = \cos(\theta)$ et $F(\theta) = P(\zeta)$ (polynômes de LEGENDRE) :

$$(1 - \zeta^2) \frac{d^2 P}{d\zeta^2} - 2\zeta \frac{dP}{d\zeta} + \lambda P = 0.$$

La solution variant ici comme $\cos(\theta) = \zeta$, l'équation se limite à : $-2\zeta + \lambda \zeta = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \alpha \cdot (\alpha + 1) = 2$ donc en pratique $\alpha = 1$.

On considère le potentiel $\Phi = \beta \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\beta}{r^2} \vec{v} \cdot \vec{u}_r = -\frac{\beta}{r^2} v \cos(\theta)$; ceci donne : $\vec{v} = -\vec{\nabla}(\Phi) = -\frac{\beta}{r^3} v \cdot (2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$.

À la surface de la boule, la condition : $\vec{v} \cdot \vec{u}_r = \vec{v} \cdot \vec{u}_r$ s'écrit :

$$-2 \frac{\beta}{R^3} v \cos(\theta) = v \cos(\theta)$$

donc
$$\beta = -\frac{R^3}{2}.$$

D'après $\vec{v} = v \cos(\theta) \vec{u}_r - v \sin(\theta) \vec{u}_\theta$, on obtient finalement :

$$\vec{v} = \frac{R^3}{2r^3} v \cdot (2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta) = \frac{R^3}{2r^3} \left((3\vec{v} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{v} \right).$$

Remarque : Cette expression est analogue à celle du dipôle électrostatique ; ce n'est pas indépendant du fait que l'avant de la boule se comporte comme une « source » de liquide (poussé en avant) et que l'arrière se comporte comme un « puits » de liquide (il s'arrête après avoir contourné la boule).

En omettant la pesanteur, la relation de BERNOULLI peut s'écrire [3] :

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} \text{ (valeur constante, mesurée à l'infini).}$$

Le potentiel Φ est exprimé ci-dessus (selon un repère mobile) en un point fixe par

rapport à la boule. Pour raisonner en notations eulériennes (en un point fixe par rapport au référentiel), il faut utiliser une dérivée composée : $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\Phi)$.

D'après ce qui précède :

$$\Phi = \frac{R^3}{2r^2} v \cos(\theta) ; \frac{d\Phi}{dt} = \frac{R^3}{2r^2} \frac{dv}{dt} \cos(\theta) \text{ (en un point fixe par rapport à la boule) ;}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{R^3}{2r^2} \frac{dv}{dt} \cos(\theta) + \vec{v} \cdot \vec{v} \text{ (en un point fixe par rapport au référentiel) ;}$$

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{R^3}{2r^3} \right)^2 [3 \cos^2(\theta) + 1] + \rho \frac{R^3}{2r^2} \frac{dv}{dt} \cos(\theta) + \rho v^2 \frac{R^3}{2r^3} [3 \cos^2(\theta) - 1] ;$$

$$p = p_0 + \frac{1}{8} \rho v^2 [9 \cos^2(\theta) - 5] + \rho \frac{R}{2} \frac{dv}{dt} \cos(\theta) \text{ (à la surface de la boule : } r = R \text{).}$$

La résultante est : $\vec{F} = \iint p d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = -R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \vec{u}_r$; l'intégration des termes constants donne forcément une contribution nulle par symétrie.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi :} \quad \vec{F} = & -\frac{9}{8} \rho v^2 R^2 \iint \cos^2(\theta) \sin(\theta) \vec{u}_r d\theta d\varphi \\ & - \rho \frac{R^3}{2} \iint \left(\frac{dv}{dt} \cos(\theta) - v \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \right) \sin(\theta) \vec{u}_r d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Par symétrie, l'intégration sur φ donne une contribution nulle perpendiculairement à l'axe polaire ; le premier terme est donc ainsi nul :

$$v \iint \cos^2(\theta) \sin(\theta) \vec{u}_r d\theta d\varphi = 2\pi \vec{v} \int_0^\pi \cos^3(\theta) \sin(\theta) d\theta = \vec{0}.$$

Dans le second terme :

$$v \iint \frac{dv}{dt} \cos(\theta) \sin(\theta) \vec{u}_r d\theta d\varphi = 2\pi \vec{v} \frac{dv}{dt} \int_0^\pi \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta = \frac{4\pi}{3} \vec{v} \frac{dv}{dt} ;$$

$$\iint v \sin^2(\theta) \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r d\theta d\varphi = 2\pi \vec{v} \frac{d\theta}{dt} \int_0^\pi \cos(\theta) \sin^2(\theta) d\theta = \vec{0}.$$

$$\text{Finalement la force de traînée a pour expression : } \vec{F} = -\rho \frac{2\pi R^3}{3} \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Remarque : Dans ce calcul, on a omis l'effet de la pesanteur ; pour en tenir compte il suffit d'augmenter la pression d'un terme correspondant dont l'intégrale redonne la poussée d'ARCHIMÈDE classique.

Dans ce calcul, le terme proportionnel à v^2 est nul, car il décrit deux effets qui se compensent : le fluide à l'avant de la boule doit subir une surpression pour être mis en mouvement ; mais, après avoir contourné la boule, ce même fluide doit aussi subir une surpression pour être ralenti et s'immobiliser.

Remarque : Ceci est lié à la vitesse d'écoulement, indépendamment de l'accélération de la boule.

Au contraire, le terme proportionnel à $\frac{d\vec{v}}{dt}$ décrit le fait que l'écoulement du fluide doit être globalement accéléré si le mouvement de la boule l'est ; c'est de ce terme que vient la force de traînée supplémentaire. La « poussée d'ARCHIMÈDE » dans le cas statique est une force opposée au poids du fluide « déplacé » (c'est-à-dire « à la place » duquel le solide est introduit) ; cette force, non calculée ici puisque la pesanteur a été omise pour simplifier, revient à remplacer la masse pesante de la boule par une masse diminuée de celle du fluide déplacé : $m - m_d$. L'effet considéré ici montre qu'en outre, dans les situations hors d'équilibre, le système déplacé n'est pas la boule, mais l'ensemble {boule + fluide} ; dans le cas d'un mouvement rectiligne, ceci revient à remplacer la masse inerte de la boule par une masse augmentée de celle du fluide entraîné : $m + m_e$; pour une boule dans un fluide parfait, on obtient ci-dessus $m_e = \frac{1}{2} m_d$; cet effet (souvent non négligeable) est hélas ignoré par de très nombreux manuels scolaires !

Annexe 2

Turbulences et ajustement de la tangente à l'origine et de l'asymptote

On considère le mouvement de chute d'une balle de golf dans l'eau, dans une cuve de grande profondeur (85 cm de haut, avec un côté transparent en polycarbonate). On constate un effet inattendu des turbulences : après une phase d'accélération, la balle semble ralentir légèrement pour accélérer à nouveau avant de tendre vers une vitesse limite. Ce phénomène n'est pas dû aux alvéoles : il est observé également avec une balle de golf « lissée » (ici pour une masse 44,6 g et un rayon 21,2 cm).

Cet effet se produit systématiquement, mais son amplitude et son déclenchement sont plus ou moins aléatoires (phénomène typiquement instable), comme le montre la figure 5 où deux exemples peuvent être comparés.

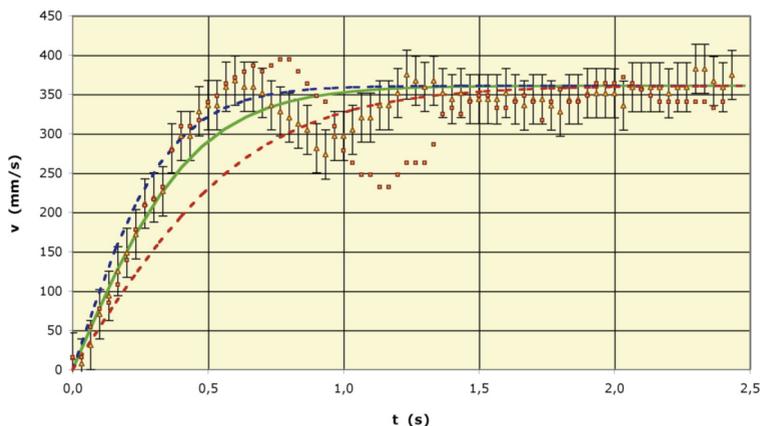


Figure 5 : Évolution temporelle de la norme de la vitesse ; effet des turbulences (les limites correspondant à $\beta = 0$ et $\beta = 1$ sont indiquées en pointillés respectivement bleus et rouges).

Il n'empêche toutefois pas l'étude envisagée ici, dans la mesure où il n'intervient ni dans la phase d'accélération initiale (ajustement de la tangente à l'origine pour les plus faibles vitesses), ni dans la phase asymptotique (ajustement de la vitesse limite). Les graphiques considérés dans l'article ne présentent que la phase initiale, la limite asymptotique étant de façon générale conforme à la théorie avec un coefficient $C_x \approx 0,5$.

Remarque : Avec des balles de golf, il devient peu approprié d'utiliser une cuve de diamètre inférieur à 10 cm, car les effets des turbulences deviennent dominants (la balle descend en oscillant d'un côté à l'autre) ; l'épaisseur d'eau de part et d'autre est alors inférieure à la taille de la balle et devient le paramètre prépondérant pour estimer le nombre de REYNOLDS.