Ajustement de modèles

par **Jean-Michel LAFFAILLE**
Lycée Henri Bergson - 49000 Angers
laffaille.j-m.edu@orange.fr

RÉSUMÉ

Quelques informations complémentaires sont proposées, concernant l'ajustement de modèles en prenant en compte les incertitudes de mesure.

INTRODUCTION

L'article « Incertitudes expérimentales » [1] décrit de façon intéressante un certain nombre d'aspects expérimentaux et théoriques associés aux calculs d'incertitudes. Quelques informations complémentaires sont ici suggérées.

1. FAIBLES STATISTIQUES ET COEFFICIENT DE STUDENT

Les auteurs indiquent les coefficients t de Student permettant de préciser les estimations des incertitudes dans le cas des faibles statistiques. Ils montrent en particulier que la correction reste généralement modeste et peut souvent être négligée.

Lorsqu'on considère les incertitudes au seuil de 68 %, une astuce de calcul consiste à remplacer $\frac{t}{\sqrt{n}}$ par $\frac{1}{\sqrt{n-1}}$ (où n est le nombre de mesures). Le tableau 1 montre que l'estimation est ainsi améliorée de façon aussi simple qu'efficace (on peut proposer mieux : $\frac{1}{\sqrt{n-1,4}}$, mais est-ce nécessaire ?).

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	40
t	1,84	1,32	1,20	1,14	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,03	1,01
$\frac{t}{\sqrt{n}}$	1,30	0,76	0,60	0,51	0,45	0,41	0,38	0,36	0,34	0,23	0,16
$\frac{1}{\sqrt{n-1}}$	1,00	0,71	0,58	0,50	0,45	0,41	0,38	0,35	0,33	0,23	0,16
$\frac{1}{\sqrt{n-1,4}}$	1,29	0,79	0,62	0,53	0,47	0,42	0,39	0,36	0,34	0,23	0,16

Tableau 1

Cela peut se généraliser (pour $n > 2$) quand on considère les incertitudes au seuil de 95 %, en remplaçant $\frac{t}{\sqrt{n}}$ par $\frac{2}{\sqrt{n-2}}$ (voire $\frac{2}{\sqrt{n-2{,}4}}$).

Remarque : L'intérêt est surtout pour automatiser des calculs, dans les cas où on ne dispose pas d'une fonction prédéfinie calculant les coefficients de Student.

2. MÉTHODE DU χ^2

Les auteurs indiquent (dans un cas particulier simple) le principe d'ajustement basé sur la minimisation de la quantité $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i^{\exp} - y_i^{th}\right)^2}{\left(\sigma_i^{\exp}\right)^2}$; ils précisent clairement que cela suppose des incertitudes négligeables sur les abscisses x_i.

Il peut être utile de généraliser au cas, assez fréquent, où les quantités théoriques sont calculées pour des x_i qui ne sont pas exempts d'incertitudes : $y_i^{th} = y^{th}\left(x_i^{\exp}\right)$. En effet, même si on se fixe un x_i « exact », il est souvent difficile d'effectuer la mesure du y_i exactement correspondant.

Pour prendre ceci en compte dans la comparaison, il faut propager l'incertitude de x_i sur y_i^{th}, puis utiliser la quantité $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i^{\exp} - y_i^{th}\right)^2}{\left(\sigma_i^{\exp}\right)^2 + \left(\sigma_i^{th}\right)^2}$.

Remarques :

- en particulier, ceci est indispensable pour que l'ajustement du modèle donne le même résultat en raisonnant sur $y_i^{th} = y^{th}\left(x_i^{\exp}\right)$ ou sur $x_i^{th} = x^{th}\left(y_i^{\exp}\right)$;
- dans le cas où il pourrait exister des corrélations entre des mesures de x_i et y_i, il faudrait en outre ajouter un terme de corrélation [2-3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bally F.-X. et Berroir J.-M. « Incertitudes expérimentales ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, novembre 2010, vol. 104, n° 928, p. 995-1019.

[2] Cortial Y. « À propos de la méthode des moindres carrés ». *Bull. Un. Phys.*, juin 1990, vol. 84, n° 725, p. 769-791.

[3] Gié H. et Moreau R. « Le calcul des incertitudes ». *Bull. Un. Phys.*, février 1987, vol. 81, n° 691 (1), p. 159-208.

Jean-Michel LAFFAILLE
Professeur de sciences physiques en MPSI
Lycée Henri Bergson
Angers (Maine-et-Loire)