Déviation d'un photon et énoncés de concours
Partie I

par **Jean-Michel LAFFAILLE**
Lycée Henri Bergson - 49000 Angers
laffaille.j-m.edu@orange.fr

RÉSUMÉ

Quelques critiques semblent absolument nécessaires à propos d'un récent article commentant l'étude, dans des énoncés de concours, de la déviation d'un photon dans un champ de gravitation. D'une part certaines questions des énoncés à l'origine du commentaire sont « assez mal » rédigées ; d'autre part les raisonnements envisagés sont très intéressant mais certaines parties appellent des justifications complémentaires.

INTRODUCTION

Un récent article [1] commente des énoncés de concours, l'un aux Olympiades internationales de physique (IPhO) [2], l'autre au concours commun Mines-Ponts [3]. Ces énoncés proposent de retrouver, dans le cadre d'un raisonnement basé sur la relativité restreinte, le décalage des raies spectrales vers le rouge et l'angle de déviation d'un rayon lumineux au voisinage d'un astre. Certains aspects en sont pour le moins discutables.

1. DILATATION DES DURÉES

1.1. Énoncé des IPhO

L'énoncé des IPhO ne suggère pas de méthode, il demande simplement : *« Un photon émis depuis la surface du Soleil (masse M, rayon R) subit un décalage de fréquence vers le rouge. En supposant une "masse au repos" équivalente pour l'énergie du photon, appliquer la théorie gravitationnelle newtonienne pour montrer que la fréquence effective (ou mesurée) du photon à l'infini est réduite (décalée vers le rouge) d'un facteur* $\left(1-\frac{GM}{Rc^2}\right)$ *».*

Comme le signale Yves DUPONT [1], ce qui est discutable ici est l'expression « masse au repos » : la « masse équivalente » m_e telle que $E = h\nu = m_e c^2$ ne peut pas être qualifiée ainsi puisque le photon étudié n'est pas au repos dans le référentiel considéré. La quantité qui pourrait à la rigueur être nommée masse « au repos » d'un photon correspondrait à $m = \frac{\sqrt{E^2 - c^2p^2}}{c^2} = 0$, mais l'expression est encore maladroite car il resterait à justifier ce qu'on considère comme « référentiel propre » du photon.

Un avantage et un inconvénient de cet énoncé est par ailleurs de laisser relativement libre la méthode, tout en considérant l'identité expérimentale entre masse inerte et masse pesante. Pour une particule massive, si la grandeur possédant la propriété d'inertie est associée à l'énergie, selon $m_e = \gamma m = \dfrac{E}{c^2}$, avec $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, on peut proposer deux généralisations les lois de la mécanique newtonienne :

- ou bien l'énergie potentielle :

$$E_p = -\frac{GM\gamma m}{r} \qquad (1)\ ;$$

- ou bien la force (où $\overrightarrow{u_r}$ est un vecteur unitaire radial) :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{GM\gamma m}{r^2}\,\overrightarrow{u_r} \qquad (2).$$

Faute d'indication supplémentaire, l'étudiant le plus physicien, refusant « d'appliquer des formules » sans justification physique, remarquera que l'expression précédente de l'énergie ne dépend pas uniquement de la position : il ne s'agit donc pas d'une énergie potentielle et *a priori* on ne peut pas l'utiliser ainsi dans le théorème de l'énergie mécanique ; il choisira donc l'expression précédente de la force.

Pour un photon, compte tenu de $cp = h\nu$, la relation fondamentale de la dynamique donne : $\dfrac{d(h\nu)}{c\,dt} = -\dfrac{GM}{r^2}\dfrac{h\nu}{c^2}$ avec $dr = c\,dt$. Ceci peut s'écrire : $\dfrac{d(h\nu)}{h\nu} = -\dfrac{GM}{c^2}\dfrac{dr}{r^2}$; on en déduit à l'infini : $\nu_\infty = \nu \exp\left(-\dfrac{GM}{Rc^2}\right) \approx \nu \cdot \left(1 - \dfrac{GM}{Rc^2}\right)$.

Ceci répond effectivement à la question, mais est-ce bien la réponse « attendue » ?

1.2. Énoncé Mines-Ponts

L'énoncé Mines-Ponts commet le même abus de langage à propos de la « masse équivalente » $m_e = \dfrac{E}{c^2}$ (qui n'est pas « la masse » du photon).

Il est par ailleurs plus directif sur la méthode, puisque son énoncé suggère très clairement de se baser sur la conservation de l'énergie mécanique : $E_m = h\nu - \dfrac{GMh\nu}{rc^2}$.

Bien que cette formulation « masque » un peu l'idée de conservation de l'énergie mécanique (d'autant plus que l'énergie « cinétique » du photon et sa masse effective s'y retrouvent par l'intermédiaire de $h\nu$), l'étudiant plus attentif et scrupuleux ne manquera pas d'être gêné par l'utilisation d'une « énergie potentielle » dont la forme équivalente, appliquée à une particule massive, dépendrait de la vitesse ! Heureusement, contrairement à celui des IPhO, l'énoncé est ici prudent sur la rédaction et il précise : « Cette approche ne manque pas d'audace et les résultats devront donc en être accueillis avec circonspection ».

L'étudiant accepte donc logiquement de donner priorité à l'approche énergétique ; il obtient ainsi (en simplifiant par h) :

$$\nu_\infty = \nu - \frac{GM\nu}{Rc^2} = \nu \cdot \left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right).$$

Remarque : Le commentaire de Yves DUPONT semble par contre inexact ; il suggère qu'on aurait pu définir la masse effective du photon par $m_e c^2 = h\nu_\infty$ et obtenir ainsi une autre formulation (équivalente au premier ordre) ; l'hypothèse sous-jacente est au contraire que la masse effective varie au fur et à mesure que varie la fréquence (l'énergie « cinétique ») : $m_{e\infty} c^2 = m_e c^2 - \frac{GMm_e}{R}$.

2. PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

2.1. Raisonnement par généralisation de l'énergie potentielle

L'évocation indirecte d'une « énergie potentielle » dépendant de la vitesse appelle une recherche de justification ; on peut essayer une approche par le principe de moindre action [4]. Afin d'alléger l'écriture des calculs, on se limite ici à une étude dans la direction radiale. On considère une particule massive, puis on passe au cas du photon en remplaçant γmc^2 par $m_e c^2 = h\nu$.

Pour une particule isolée, l'action peut s'écrire : $S = -\int mc\, ds$ où $ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2$ décrit l'intervalle élémentaire d'espace-temps relativiste. Pour prendre en compte la gravitation, on est conduit à rechercher un terme d'interaction sous une forme invariante relativiste :

$$S = -\int mc\, ds + \frac{1}{c}\int A\, ds$$

où $A = A(r, r^{\bullet}, t)$ est une fonction scalaire (le coefficient $\frac{1}{c}$ est introduit arbitrairement pour simplifier la suite des calculs). On suppose dans la suite que A ne dépend pas explicitement du temps (champ de pesanteur statique) et on note $v = r^{\bullet}$.

L'action peut alors s'écrire : $S = \int \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + A \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) dt$; or, le lagrangien L est défini selon $S = \int L(r, v, t)\, dt$ donc cela correspond à :

$$L = \left(-mc^2 + A\right)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (3).$$

L'impulsion généralisée est :

$$P = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\left(m - \frac{A}{c^2}\right)v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\partial A}{\partial v} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (4).$$

Le hamiltonien est :

$$H = Pv - L = \frac{mc^2 - A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\partial A}{\partial v} v \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

On constate ainsi qu'en choisissant $A = \frac{GMm}{r}$ (indépendant de v) on obtient :

$$P = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right) \qquad (5)\ ;$$

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right).$$

Le hamiltonien ne dépendant pas explicitement du temps, c'est une constante du mouvement ; ceci correspond à une énergie mécanique constante avec l'expression (1) pour l'énergie potentielle. On justifie donc en passant au photon :

$$H = h\nu \cdot \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right) = \text{Cste}.$$

On peut aussi chercher les équations du mouvement à partir du lagrangien pour envisager l'expression de la force correspondante : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial L}{\partial r}$.

En notant $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ les relations (3) et (5) donnent :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dp}{dt} \cdot \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right) - \frac{p}{mc^2}\frac{dA}{dr} v = \frac{dA}{dr} \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ ;$$

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \left(\frac{pv}{mc^2} + \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \cdot \frac{1}{1-\frac{GM}{rc^2}} = -\frac{GM\gamma m}{r^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{GM}{rc^2}}$$

Dans l'approximation des champs faibles $r \gg R_s = \frac{2GM}{c^2}$ (rayon de Schwarzschild), cette force est comparable à celle donnée par la relation (2), évoquée dans la partie 1.1.

Pour un photon, compte tenu de $cp = h\nu$ et avec $dr = c\,dt$, la relation fondamentale donne :

$$\frac{d(h\nu)}{c\,dt} = -\frac{GM}{r^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{GM}{rc^2}} \frac{h\nu}{c^2}.$$

Ceci peut s'écrire : $$\frac{d(h\nu)}{h\nu}=\frac{dr}{r}-\frac{dr}{r-\frac{GM}{c^2}},$$

ce qui redonne à l'infini : $$\nu_\infty=\nu\cdot\left(1-\frac{GM}{Rc^2}\right).$$

2.2. Raisonnement par généralisation de la force

Inversement, on peut alors se demander s'il existe une formulation redonnant exactement l'expression (2) de la force évoquée dans la partie 1.1.

Les relations (2), (3) et (4) précédentes, pour une particule massive et en cherchant $A=A(r)$, correspondent dans ce cas à :

$$\frac{dp}{dt}=\frac{dA}{dr}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{A}{mc^2}}}\cdot\frac{1}{1-\frac{A}{mc^2}}=-\frac{GM}{r^2}\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

L'intégration donne : $$\frac{dA}{mc^2-A}=-\frac{GM}{c^2}\frac{dr}{r^2}$$

puis finalement (la formulation cherchée existe) :

$$A=mc^2\cdot\left(1-\exp\left(-\frac{GM}{rc^2}\right)\right).$$

On peut alors aussi considérer le hamiltonien :

$$H=\frac{mc^2-A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\exp\left(-\frac{GM}{rc^2}\right)\ ;$$

puisqu'il ne dépend pas explicitement du temps, c'est une constante du mouvement ; on justifie donc en passant au photon :

$$H=h\nu\cdot\exp\left(-\frac{GM}{rc^2}\right)=\text{Cste}.$$

Autrement dit, la réponse n'est pas unique ! Les différentes généralisations sont équivalentes (au moins au premier ordre) pour traiter cette question ; il faudrait éventuellement les tester par d'autres aspects expérimentaux (mais l'intérêt reste limité, puisque la théorie mieux adaptée pour décrire la gravitation est la relativité générale).

Dans un concours comme celui de Mines-Ponts, dont l'énoncé guide clairement le candidat, cela devrait ne pas poser de difficulté ; mais pour les IPhO, les candidats qui ne donnent pas la réponse « attendue » sont-ils pris en compte correctement ?

D'ailleurs, à propos de la prise en compte des candidats, il me semble utile de souligner le problème de la participation aux olympiades internationales : les étudiants universitaires sont anormalement exclus, alors que la France profite du statut à part des classes préparatoires pour contourner l'interdiction (au détriment des bons élèves universitaires) ; pire : certains pays ont des classes de préparation aux olympiades. Le critère pour être candidat devrait être basé sur les programmes scolaires, quitte à accepter des élèves ayant une année scolaire de plus dans les pays dont les programmes sont plus modestes.

3. DURÉES, LONGUEURS ET CÉLÉRITÉ

Une difficulté de raisonnement est introduite si un physicien, situé à l'infini, prétend utiliser comme horloge locale à la surface du Soleil la période (ou fréquence) des photons qu'il reçoit de cette provenance. La période des photons étant dilatée par un phénomène physique, le physicien qui s'en sert d'horloge ne sait pas s'il repère ainsi une réelle dilatation des durées ou une « distorsion » de l'information temporelle lors du déplacement.

Le fait de changer d'unité ne constitue pas une modification des grandeurs [5], ainsi le fait qu'une minute soit mesurée en secondes ne la fait pas durer soixante fois plus longtemps.

Remarque : Ceci est en partie évoqué par Yves DUPONT, mais il me semble qu'il aurait été beaucoup plus raisonnable de rédiger les énoncés de façon moins équivoque.

Une autre ambiguïté est introduite pour les distances :

- L'énoncé Mines-Ponts utilise ici encore des précautions oratoires : *« On admettra que cette dilatation du temps s'accompagne d'une contraction de l'unité de longueur, avec le même facteur »*.
- L'énoncé des IPhO est beaucoup plus intrépide : *« En outre, il peut être montré qu'une dilatation des durées est toujours accompagnée d'une contraction de l'unité de longueur avec le même facteur ».*

Remarque : Contrairement à ce que suggère Yves DUPONT, ces deux formulations ne sont pas « très proches » à mon avis.

Certes, en relativité restreinte, les dilatations des durées associées aux transformations de Lorentz sont accompagnées de contractions des longueurs correspondantes ; mais ce n'est pas ce type de phénomènes qui est étudié ici. Certes, le traitement du même problème en relativité générale aboutit effectivement à une situation analogue ; mais ce n'est pas la théorie envisagée ici. En réalité, il n'y a en relativité restreinte aucune contraction des longueurs associée à ce phénomène ; l'effet n'est ajouté, artificiellement et sans véritable justification physique, que dans le but « de retrouver » le résultat correct (facteur 2 d'écart) prédit par la relativité générale (« méthode heuristique » est un euphémisme…).

Remarque : À la rigueur pourrait-on envisager une modification des longueurs, en les mesurant d'après la propagation de la lumière à célérité constante, dès lors qu'il y a une modification des durées, mais cela entre en contradiction avec le raisonnement envisagé dans la suite.

Une troisième maladresse concerne la célérité de la lumière : en relativité restreinte, les transformations de Lorentz sont associées à des dilatations des durées et des contractions des longueurs, mais la célérité c de la lumière dans le vide n'en reste pas moins une constante universelle. La situation est analogue en relativité générale, où l'utilisation d'un repère local non seulement ne modifie en rien cette vitesse de propagation, mais instaure même cela en fondement de la théorie. Sous prétexte de proposer aux étudiants un exercice de mécanique relativiste, on fait dire à la théorie le contraire de sa signification.

Remarque : Ceci aussi est signalé par Yves DUPONT.

Au total, il me semble qu'il aurait été beaucoup plus raisonnable de rédiger les énoncés de façon moins équivoque (l'énoncé Mines-Ponts dénote un effort en ce sens, mais reste nettement améliorable).

On peut proposer par exemple (sans prétendre atteindre la perfection, il s'agit de dire réellement ce qui est fait) :

- « Dans la théorie de la relativité générale, on obtient une dilatation analogue des durées, mais pour des raisons différentes : il s'agit d'une réelle différence dans le fonctionnement des horloges locales (la période à la surface du Soleil dure plus longtemps qu'à l'infini parce que "toutes" les durées y sont dilatées) et non une modification de la fréquence des photons par un phénomène physique lors du déplacement jusqu'à l'infini ».
- « Dans la théorie de la relativité générale, cette dilatation des durées est accompagnée d'une contraction de l'unité de longueur avec le même facteur. Pour obtenir un résultat correct, on raisonnera comme s'il en était de même ici ».
- « La modélisation précédente ne permet pas d'exprimer simplement le calcul de la déviation des rayons lumineux par un champ de gravitation ; on peut par contre proposer un calcul par analogie. Une dilatation des durées de propagation, associée à une contraction des longueurs, a sur ce point un effet semblable à une modification de la vitesse de propagation : elle modifie de façon analogue la recherche du trajet le plus court (celui suivi par la lumière). Or, on sait résoudre ce type de problème à l'aide d'un indice de réfraction $n(r)$ dépendant du lieu… ».

CONCLUSION

Indépendamment des points ambigus auxquels il me semblait nécessaire d'apporter un complément de justification (mais la connaissance du principe de moindre action n'est pas au programme), la démarche proposée dans ces énoncés de concours est originale et intéressante, mais mal rédigée.

Alors qu'il est à juste titre reproché à de nombreux étudiants de « réciter des formules » en se préoccupant insuffisamment de leur signification (ou de leur domaine de validité), loin d'ignorer (ou pire, de mépriser) les méthodes heuristiques, l'enseignement se doit de préciser clairement la démarche des raisonnements (de même que « savoir faire des approximations justifiées » ne signifie pas « travailler approximativement »).

BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

[1] DUPONT Y. « Déviation d'un photon dans un champ de gravitation ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, décembre 2007, vol. 101, n° 899 (2), p.177-185.

[2] IPhO 2000 - problème théorique 3 - partie B :
- site international officiel : `http://www.jyu.fi/kastdk/olympiads/`
- site particulier 2000 : `http://www.star.le.ac.uk/IPhO-2000/`

[3] Concours Mines-Ponts 2005, MP physique II : `http://allomaths20.ifrance.com/`

[4] Je n'ai trouvé aucune référence traitant les calculs correspondants (la gravitation est plutôt envisagée dans le cadre de la relativité générale) ; je les ai établis sur la base des méthodes générales (je ne saurais donc trop recommander de les vérifier) :
- LANDAU L. et LIFCHITZ E. *Mécanique*. Moscou : Éditions Mir, 1982.
- LANDAU L. et LIFCHITZ E. *Théorie du champ*. Moscou : Éditions Mir, 1970.

[5] LAFFAILLE J.-M. « À propos d'une "métrique de Newton" ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, décembre 2007, vol. 101, n° 899 (1), p.1157-1161.