Déviation d'un photon et énoncés de concours
Partie II

par **Jean-Michel LAFFAILLE**
Lycée Henri Bergson - 49000 Angers
laffaille.j-m.edu@orange.fr

RÉSUMÉ

Quelques critiques semblent absolument nécessaires à propos d'un récent article commentant l'étude, dans des énoncés de concours, de la déviation d'un photon dans un champ de gravitation. Indépendamment des maladresses de rédaction de certaines questions à l'origine du commentaire, un approfondissement semble montrer que certains des raisonnements envisagés sont incompatibles avec les principes physiques largement reconnus.

INTRODUCTION

Un récent article [1] commente des énoncés de concours, l'un aux Olympiades internationales de physique (IPhO) [2], l'autre au concours commun Mines-Ponts [3]. Ces énoncés proposent de retrouver, dans le cadre d'un raisonnement basé sur la relativité restreinte, le décalage des raies spectrales vers le rouge et l'angle de déviation d'un rayon lumineux au voisinage d'un astre. Dans une précédente critique [4], des maladresses de rédaction de ces énoncés ont été précisées. Certains aspects discutables du point de vue physique ont en outre été signalés, mais l'intérêt d'un approfondissement en semblait limité, puisque la théorie mieux adaptée pour décrire la gravitation est la relativité générale. Après avoir tout de même effectué cette étude plus précise, par acquit de conscience, il apparaît que ces aspects sont non seulement discutables, mais incompatibles avec l'invariance relativiste (en relativité restreinte) associée au principe de moindre action, pourtant largement reconnus par la communauté scientifique.

Remarque : D'une certaine façon, les énoncés de concours cités ne sont pas directement en cause ; ils ne font que reprendre un calcul considéré comme « classique »… c'est ce dernier qui est controversé ici (mais cela les implique forcément indirectement).

1. CALCUL CLASSIQUE

1.1. Particule massive

Le calcul classique peut partir de la déviation d'une particule massive, avec le facteur relativiste $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, en étudiant l'énergie « potentielle » généralisée : $E_p = -\dfrac{GM\gamma m}{r}$ et l'énergie mécanique généralisée :

$$E_m = \gamma mc^2 - \frac{GM\gamma m}{r} \qquad (1),$$

supposée constante du mouvement.

Hélas, sans justification précise, les raisonnements supposent qu'une telle formulation de l'énergie reste associée à une force de gravitation centrale, conduisant à la conservation du moment cinétique $\sigma = \gamma m r^2 \theta^{\cdot}$ (ici algébriquement en coordonnées polaires, puisque la conservation de $\vec{\sigma}$ implique un mouvement plan).

Ceci permet de généraliser le calcul non relativiste, par exemple avec la notation $u = \frac{1}{r}$ de Binet :

$$v^2 = \frac{\sigma^2}{\gamma^2 m^2} \cdot \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) = \frac{\sigma^2}{m^2} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \cdot \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) \quad (2)$$

permet de déduire : $$\gamma^2 = 1 + \frac{\sigma^2}{m^2 c^2} \cdot \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) \quad (3).$$

En dérivant (3) on obtient ainsi :

$$\gamma \frac{d\gamma}{du} = \frac{\sigma^2}{m^2 c^2} \cdot \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \quad (4) ;$$

puis en dérivant (1) et en multipliant par $\frac{\gamma}{mc^2}$ pour faciliter la substitution ultérieure :

$$\frac{\gamma}{mc^2} \frac{dE_m}{du} = \gamma \frac{d\gamma}{du} \cdot \left(1 - \frac{GM}{c^2} u \right) - \gamma^2 \frac{GM}{c^2} \quad (5).$$

Utilisant l'hypothèse de E_m constante du mouvement permet de simplifier (5), puis en y substituant (3) et (4) :

$$0 = \frac{\sigma^2}{m^2 c^2} \cdot \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \cdot \left(1 - \frac{GM}{c^2} u \right) - \frac{GM}{c^2} - \frac{GM}{c^2} \frac{\sigma^2}{m^2 c^2} \cdot \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right).$$

Après simplification, en posant $\Gamma = \frac{\sigma}{m}$ (constante), on obtient l'équation de la trajectoire :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{1 - \frac{GM}{c^2} u} \frac{GM}{\Gamma^2} + \frac{1}{1 - \frac{GM}{c^2} u} \frac{GM}{c^2} \cdot \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) \quad (6).$$

1.2. Cas du photon

Le cas du photon peut être considéré en considérant la limite où m tend vers zéro, tout en remplaçant γmc^2 par $h\nu$ (γ tend vers l'infini).

Le moment cinétique est alors $\sigma = \frac{h\nu}{c^2} r^2\, \theta^{\bullet}$ et $\Gamma = \frac{\sigma}{m}$ tend vers l'infini. L'équation (6) devient donc pour la trajectoire d'un photon :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{1 - \frac{GM}{c^2}u} \frac{GM}{c^2} \cdot \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) \qquad (7).$$

Remarque : Le terme d'ordre le plus bas disparaît et il ne reste que le terme correctif relativiste, ce qui est logique puisque l'approximation non relativiste doit redonner la limite newtonienne pour un photon non dévié : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0$.

1.3. Calcul de la déviation

On considère maintenant le cas d'un photon partant de l'infini vers l'astre et passant au plus près à la distance R de l'astre, sur l'axe Ox (*cf.* figure 1).

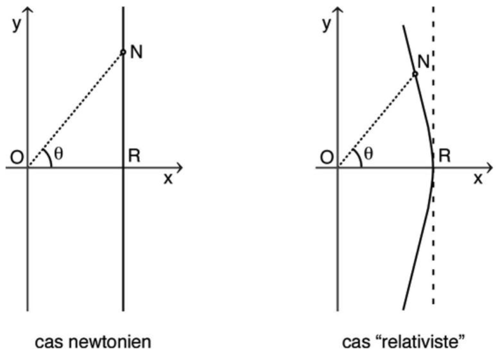

Figure 1 : Allure de la trajectoire.

Pour la résolution de (7), on peut utiliser une méthode perturbative ; les termes correctifs relativistes sont associés au coefficient $\frac{GM}{c^2}$ qui tend vers zéro quand c tend vers l'infini.

La multiplication par $\frac{1}{1 - \frac{GM}{c^2}u} \approx 1 + \frac{GM}{c^2}u$ peut être omise puisqu'elle intervient au second ordre (correction d'un terme du premier ordre). De même, dans le membre de droite (décrivant un terme correctif de l'équation newtonienne), on peut remplacer u par la solution newtonienne $u = \frac{\cos(\theta)}{R}$.

On obtient ainsi : $\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\approx\frac{GM}{R^2c^2}$. La solution correspondant aux conditions imposées est : $u\approx\frac{\cos(\theta)}{R}+\frac{GM}{R^2c^2}$.

Pour calculer la déviation, on peut utiliser les coordonnées cartésiennes $x=r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$. On obtient ainsi : $x\approx R-\frac{GM}{Rc^2}\sqrt{x^2+y^2}$ dont l'expression asymptotique est : $x\approx-\frac{GM}{Rc^2}|y|$.

Ceci correspond à une déviation $\alpha=\Delta\theta-\pi\approx 2\frac{GM}{Rc^2}$. Ce résultat, moitié de ce que prévoit la relativité générale, est « classiquement » considéré comme l'expression de la déviation des photons pour le modèle de relativité restreinte. Une telle interprétation comporte toutefois une incohérence : on généralise la formule de l'énergie d'une façon qui peut être acceptable, mais sans se préoccuper de ce que cela impose pour la force. L'invariance relativiste fait que la force généralisée <u>ne peut pas</u> être toujours radiale ; la non-conservation du moment cinétique qui en découle modifie le résultat de façon fondamentale.

<u>Remarque</u> : La déviation étant faible, on peut confondre la distance de l'astre aux asymptotes (quantité mesurée lors des observations astronomiques) et la distance minimum d'approche.

2. PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

2.1. Établissement des relations pour une particule massive

L'évocation indirecte d'une « énergie potentielle » dépendant de la vitesse appelle une recherche de justification ; on peut essayer une approche par le principe de moindre action [5]. On considère d'abord une particule massive.

Pour une particule isolée, l'action peut s'écrire : $S=-\int mc\,ds$ où $ds^2=c^2dt^2-d\ell^2$ décrit l'intervalle élémentaire d'espace-temps relativiste. Pour prendre en compte la gravitation, on est conduit à rechercher un terme d'interaction sous une forme invariante relativiste : $S=-\int mc\,ds+\frac{1}{c}\int A\,ds$ où $A=A\left(x_i,\dot{x}_i,t\right)$ est une fonction scalaire (le coefficient $\frac{1}{c}$ est introduit arbitrairement pour simplifier les notations). On suppose dans la suite que A ne dépend que des coordonnées de position.

<u>Remarque</u> : La dépendance par rapport au temps ne concerne pas le champ statique ; la dépendance par rapport à la vitesse alourdit les calculs envisagés ici sans en changer les caractéristiques principales (*cf.* annexe).

L'action peut alors s'écrire : $S = \int\left(-mc^2 + A\right)\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$; or, le lagrangien L est défini selon $S = \int L\left(x_i, v_i, t\right)dt$ donc cela correspond à :

$$L = \left(-mc^2 + A\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{8}$$

Les coordonnées de l'impulsion généralisée $\vec{P}$ (numérotées par l'indice « i ») sont telles que :

$$P_i\frac{\partial L}{\partial v_i} = \gamma\cdot\left(m-\frac{A}{c^2}\right)v_i \tag{9}$$

Le hamiltonien est : $H = \vec{P}\cdot\vec{v} - L = \gamma\cdot\left(mc^2 - A\right)$. Cet hamiltonien ne dépendant pas explicitement du temps, il décrit une énergie mécanique constante du mouvement :

$$E_m = \gamma\cdot\left(mc^2 - A\right) \tag{10}$$

On peut trouver les équations du mouvement à partir du lagrangien avec l'expression de la force correspondante : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}$ soit d'après (8) :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\vec{\nabla}A \tag{11}$$

En notant $\vec{p} = \gamma m\,\vec{v}$ les relations (9) et (11) donnent :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\left(1-\frac{A}{mc^2}\right) - \vec{v}\cdot\vec{\nabla}A\,\frac{\gamma\vec{v}}{c^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\vec{\nabla}A\ ;$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\gamma}{1-\frac{A}{mc^2}}\cdot\left(\vec{\nabla}A + \left(\vec{\nabla}A\times\frac{\vec{v}}{c}\right)\times\frac{\vec{v}}{c}\right).$$

On se limite dans ce qui suit au champ à symétrie sphérique d'un astre : $A = A(r)$. Dans ce cas, $\vec{\nabla}A$ est radial et $\left(\vec{\nabla}A\times\vec{v}\right)\times\vec{v}$ est dans le plan contenant $\vec{\nabla}A$ et $\vec{v}$, donc la force ne peut pas faire sortir le mouvement de ce plan.

En raisonnant alors en coordonnées polaires :

$$\vec{F} = \frac{\gamma}{1-\frac{A}{mc^2}}\frac{dA}{dr}\cdot\left(\overrightarrow{u_r} + \frac{v_\theta}{c^2}\left(v_r\overrightarrow{u_\theta} - v_\theta\overrightarrow{u_r}\right)\right) \tag{12}$$

Une caractéristique essentielle de cette force est que, dans le cas du champ à symétrie sphérique d'un astre, elle n'est pas toujours radiale.

__Remarque__ : Ceci est analogue au cas du champ électromagnétique, déduit à partir d'un quadrivecteur potentiel par un terme d'interaction du type $\frac{e}{c}\int\left(\sum A_i\,dx_i\right)$; l'invariance relativiste donne une force de Lorentz où des effets magnétiques s'ajoutent inévitablement aux effets électriques ; la différence est par contre que, contrairement au cas gravitationnel, le quadripotentiel électromagnétique a suffisamment de composantes indépendantes pour qu'on observe dans certains cas un effet électrostatique radial.

2.2. Moment cinétique et équation de la trajectoire

L'expression (12) de la force précédente correspond au moment :

$$\vec{\mathscr{M}} = \dot{\vec{\sigma}} = \frac{dA}{dr}\frac{1}{1-\dfrac{A}{mc^2}}\frac{\gamma r^2\dot{\theta}\dot{r}}{c^2}\overrightarrow{u_z}.$$

Avec $\vec{\sigma} = \gamma m\, r^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$, ceci donne : $\dfrac{\dot{\sigma}}{\sigma} = \dfrac{\dot{A}}{mc^2 - A}$; on en déduit que la quantité constante n'est plus le moment cinétique, mais $\Sigma = \sigma \cdot \left(1-\dfrac{A}{mc^2}\right)$.

Pour étudier la trajectoire, on peut utiliser (3) : $\gamma^2 = 1 + \dfrac{\sigma^2}{m^2c^2}\cdot\left(\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right)$ mais on obtient en dérivant dans ce cas à la place de (4) :

$$\gamma\frac{d\gamma}{du} = \frac{\sigma^2}{m^2c^2}\cdot\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right) + \frac{\sigma}{m^2c^2}\frac{d\sigma}{du}\cdot\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) \qquad (13).$$

La quantité constante $\Sigma = \sigma\cdot\left(1-\dfrac{A}{mc^2}\right)$ impose alors $\dfrac{d\sigma}{du} = \dfrac{\sigma}{mc^2}\dfrac{1}{1-\dfrac{A}{mc^2}}\dfrac{dA}{du}$; on en déduit ensuite, en dérivant l'énergie mécanique constante (10) et en multipliant par $\dfrac{\gamma}{mc^2}$ pour préparer la substitution :

$$\frac{\gamma}{mc^2}\frac{dE_m}{du} = \gamma\frac{d\gamma}{du}\cdot\left(1-\frac{A}{mc^2}\right) - \frac{\gamma^2}{mc^2}\frac{dA}{du} = 0 \qquad (14).$$

Après simplification, en posant $\Gamma' = \dfrac{\Sigma}{m}$ (constante), la combinaison de (13) et (14) donne l'équation de la trajectoire :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{\Gamma'^2}\cdot\left(1-\frac{A}{mc^2}\right)\frac{1}{m}\frac{dA}{du} \qquad (15).$$

2.3. Cas du photon

Le cas du photon peut être considéré comme précédemment : $\Gamma' = \dfrac{\Sigma}{m}$ tend vers l'infini ; en outre, A est une quantité extensive, proportionnelle à m (l'une des expressions possibles est par exemple $A = \dfrac{GMm}{r}$), donc $\dfrac{A}{m}$ et $\dfrac{1}{m}\dfrac{dA}{du}$ sont indépendants de m et non modifiés par le passage à la limite.

Le second membre de l'équation précédente (15) tend donc vers zéro et la trajectoire d'un photon correspond donc à : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0$.

La solution respectant les conditions imposées est donc $u = \frac{\cos(\theta)}{R}$; elle décrit des photons non déviés.

Remarque : Cela n'est en fin de compte pas illogique ; si on part d'un principe d'invariance relativiste correspondant à la relativité restreinte, l'énergie des photons peut varier, mais leur célérité ne change ni en norme, ni en direction (il faut utiliser la relativité générale pour aller au-delà).

D'une certaine façon, les énoncés de concours proposant des méthodes « heuristiques » pour déduire la déviation des photons en se basant sur la relativité restreinte sont donc incohérents.

On peut se demander pourquoi cette faiblesse est généralement ignorée. Probablement parce qu'il est « classiquement » connu que la relativité restreinte n'est pas la bonne théorie pour décrire les effets relativistes de la gravitation : tout le monde passe à côté sans regarder de façon approfondie.

CONCLUSION

Indépendamment de quelques maladresses de rédaction, la démarche proposée dans ces énoncés de concours est originale et intéressante, mais en partie incohérente.

L'invariance relativiste associée au principe de moindre action, tous deux largement reconnus par la communauté scientifique, montrent que la force gravitationnelle généralisée à la relativité restreinte ne peut pas être toujours radiale. Il en découle la non-conservation du moment cinétique dans des situations où certains raisonnements « classiques » supposent généralement sa conservation.

En particulier, dans le cas au moins d'un « potentiel » $A(r)$ indépendant de la vitesse, cela conduit à une absence de déviation des photons lors du passage au voisinage d'un astre.

BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

[1] DUPONT Y. « Déviation d'un photon dans un champ de gravitation ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, décembre 2007, vol. 101, n° 899 (2), p.177-185.

[2] IPhO 2000 - problème théorique 3 - partie B :
- site international officiel : `http://www.jyu.fi/kastdk/olympiads/`
- site particulier 2000 : `http://www.star.le.ac.uk/IPhO-2000/`

[3] Concours Mines-Ponts 2005, MP physique II : `http://allomaths20.ifrance.com/`

[4] LAFFAILLE J.-M. « Déviation d'un photon et énoncés de concours - Partie I ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, parution dans ce numéro.

[5] Je n'ai trouvé aucune référence traitant les calculs correspondants (la gravitation est plutôt envisagée dans le cadre de la relativité générale) ; je les ai établis sur la base des méthodes générales (je ne saurais donc trop recommander de les vérifier) :

- LANDAU L. et LIFCHITZ E. *Mécanique*. Moscou : Éditions Mir, 1982.
- LANDAU L. et LIFCHITZ E. *Théorie du champ*. Moscou : Éditions Mir, 1970.

Annexe

Expressions plausibles pour un potentiel A dépendant de la vitesse

Pour décrire l'effet de la gravitation sur une particule massive, on peut considérer l'action : $S = -\int mc\, ds + \frac{1}{c}\int A\, ds$ avec $A = A\left(x_i, \dot{x}_i, t\right)$ dépendant de la vitesse. D'après $S = \int L\left(x_i, v_i, t\right) dt$, cela correspond au lagrangien $L = \left(-mc^2 + A\right)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Les coordonnées de l'impulsion généralisée $\vec{P}$ (numérotées par l'indice « i ») sont alors telles que :

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \gamma \cdot \left(m - \frac{A}{c^2}\right) v_i + \frac{\partial A}{\partial v_i}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Le hamiltonien est :

$$H = \vec{P} \cdot \vec{v} - L = \gamma \cdot \left(mc^2 - A\right) + \sum\left(v_i \frac{\partial A}{\partial v_i}\right)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Afin de préciser le lagrangien, on peut raisonnablement supposer que son expression est simple et redonne la forme indépendante de la vitesse (utilisée dans l'article) quand cette dernière est faible. Ceci conduit à proposer pour l'action : $S = -\int\left(mc - \frac{A' + A''}{c}\right) ds$ où A'' est indépendant de la vitesse et où A'' est une expression simple de la vitesse.

L'action devant correspondre à un invariant relativiste, le plus simple pourrait être de construire le scalaire A'' sous la forme d'un 4-produit scalaire $B_\mu u^\mu$, en adoptant la convention de sommation d'Einstein avec $\mu \in \left(0, 1, 2, 3\right)$; B_μ étant un « quadripotentiel » et $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ étant la quadrivitesse. La contribution de A'' à l'action serait alors de la forme $\frac{1}{c}\int B_\mu \frac{dx^\mu}{ds} ds = \frac{1}{c}\int B_\mu dx^\mu$ qui est trop analogue à celle du terme utilisé pour l'électromagnétisme… cela semble donc exclu (par comparaison des propriétés expérimentales connues et différentes, pour la gravitation et l'électromagnétisme).

Si on envisage une intervention d'un terme du second ordre ($u_\mu u^\mu = 1$ étant exclu) on peut proposer une dépendance sous forme d'un produit tensoriel $B_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$. Il est alors intéressant de considérer que $A'' = \sqrt{B_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}$ donne une contribution à l'action de la forme : $\frac{1}{c}\int\sqrt{B_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}}\, ds = \frac{1}{c}\int ds''$ avec $ds''^2 = B_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ analogue au terme utilisé pour la relativité générale… cela est donc exclu pour construire une description de la gravitation dans le cadre de la relativité restreinte.

À ce niveau, il me semble important de constater que, pour un « potentiel » scalaire A' indépendant de la vitesse, l'expression de l'action peut s'écrire : $S = -\int mc\, ds'$ avec

$ds'^2 = \left(1 - \frac{A'}{mc^2}\right)^2 ds^2 = \left(1 - \frac{A'}{mc^2}\right) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski. Ceci correspond à décrire la gravitation en relativité restreinte en se limitant à des espaces « localement plats » (avec seulement un facteur d'échelle variable selon le lieu) dans lesquels il n'est en fin de compte pas illogique d'aboutir à la conclusion que la lumière n'est pas déviée. En particulier, ceci constitue effectivement un cas particulier restreint de la relativité générale.

Si au contraire on envisage une contribution à l'action de la forme $\frac{1}{c} \int B_{\mu\nu} u^\mu v^\nu \, ds$ (et *a fortiori* pour des termes plus compliqués), ceci semble plutôt décrire une théorie qui, sans être vraiment concurrente de la relativité générale, n'en est sûrement pas une description simplifiée ; cela sort donc du cadre d'une approche de la gravitation en relativité restreinte. Inversement, la description envisagée dans l'article semble donc la plus générale dans cette approche, avec un potentiel indépendant de la vitesse.