À propos d'une « métrique de Newton »

par **Jean-Michel LAFFAILLE**
Lycée Henri Bergson - 49000 Angers
laffaille.j-m.edu@orange.fr

RÉSUMÉ

Quelques commentaires semblent absolument nécessaires à propos d'un récent article sur une métrique d'espace courbe associée aux lois de Newton et Coulomb. Indépendamment de quelques notations ambiguës, les raisonnements envisagés sont très intéressants, mais hélas en partie inexacts, ou mériteraient une autre rédaction.

1. MASSE RELATIVISTE

L'article « Métrique d'espace courbe associée aux lois de Newton et de Coulomb » [1] propose une approche originale et très intéressante des lois de force non relativistes, avec un point de vue associé à une métrique, comme le fait la relativité générale.

Un premier reproche qu'on peut lui faire est d'utiliser parmi ses notations une « masse variable » dépendant de l'état de mouvement. Pour préciser l'historique, à l'époque de FEYNMAN, il y avait deux écoles de pensée :

- les partisans de la masse fixe (une majorité d'environ deux tiers des physiciens d'alors) ;
- les partisans de la masse variable (environ un tiers, dont FEYNMAN).

Les avantages de la masse variable étaient de généraliser l'idée $E = mc^2$ (une masse pour toute énergie… y compris pour l'énergie cinétique) et de permettre de garder certaines relations (comme $p = mv$) en mécanique relativiste.

Les avantages de la masse fixe étaient de mieux séparer une énergie de masse et une énergie cinétique ($E = E_c + mc^2$) mais l'inconvénient était de devoir accepter que la grandeur physique inerte et pesante est l'énergie (et non plus seulement la masse).

Dans les années 70 puis 80 toutefois, les développements importants de ces théories (CERN, etc.) ont conduit à des simplifications des notations : en mesurant les distances en « secondes-lumière », la valeur numérique de c est égale à l'unité et cela permet les abus de notations du type $E^2 = p^2 + m^2$ (cela simplifie nettement l'écriture des calculs un peu longs ; or on rétablit facilement les c des formules par une simple analyse d'homogénéité des unités). On fait d'ailleurs de même en mécanique quantique avec $\hbar$ (par exemple : $p_x \psi = i\, \partial_x \psi$).

La « masse variable » éventuelle devenant alors « la même chose » que l'énergie, elle perd tout intérêt ; ses partisans (déjà initialement minoritaires) se sont donc progressivement raréfiés (à tel point que je n'en avais plus entendu un seul depuis 1978 et que je croyais l'espèce totalement éteinte… il semble que non).

La science a évolué, tout en gardant un contenu scientifique souvent compatible avec cette époque ; par contre, les conventions de notation ont nettement évolué… Il me semble probable que s'il avait enseigné maintenant, FEYNMAN se serait rallié aux conventions actuellement admises par la communauté scientifique [2].

Remarque : Devait-on définir la masse comme la grandeur inerte et pesante, auquel cas c'était « la même chose » que l'énergie relativiste (au facteur près c^2 contant), ou devait-on conserver à la masse sa capacité à décrire le « contenu matériel » du système (de même que 1 kg de nourriture correspond toujours à la même quantité pour un astronaute sur la Lune, bien que le poids correspondant y soit plus faible que sur Terre, il est intéressant que 1 kg de nourriture en mouvement décrive toujours la même quantité…) ; le choix s'est finalement porté sur le second critère : la masse se mesure par définition au repos…

Cela dit, il s'agit de la même physique avec seulement des notations différentes ; on peut donc, pour le temps de cette discussion, s'adapter aux conventions de l'auteur.

2. CHARGE RELATIVISTE

Une difficulté réelle intervient au contraire lorsque l'auteur indique que « Les expériences avec des particules chargées ont montré que le rapport charge/masse restait constant [quelle que] soit la vitesse : $q/m = q_0/m_0$ ».

Étant donné que les notations de l'article correspondent à : $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (où $\beta = v/c$),

cela conduit à une « charge variable » selon l'état de mouvement : $q = \dfrac{q_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Or les charges électriques des particules qui interviennent dans la mécanique relativiste sont invariantes [3].

La partie des calculs concernant la loi de Coulomb semble donc fausse ; ceci n'empêche toutefois pas de continuer la discussion pour ce qui concerne la loi de Newton (restriction imposée dans la suite).

3. LOI D'ÉNERGIE RELATIVISTE

L'auteur prend ensuite exemple sur le champ électrique, égal à l'opposé du gradient du potentiel électrique (en l'absence d'effets magnétiques variables). Il considère ainsi un champ de gravitation $\vec{G}$ tel que la force de gravitation soit $\vec{F} = m\vec{G}$. En notant M la masse de l'astre attracteur, qu'on peut supposer fixe, ceci correspond à : $\vec{G} = -\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$ (où $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire radial) dès lors qu'on raisonne selon la loi de Newton.

L'auteur définit alors un « potentiel » de gravitation U tel que $\vec{G} = \vec{\nabla}U$ (avec une convention de signe peu usuelle) ; ceci correspond à : $U = M/r$.

Remarque : Il peut être important de noter au passage que cette force, dépendant non seulement de la position, mais aussi de la vitesse (puisque la « masse variable » m en dépend), ne dérive pas d'une énergie potentielle ; ceci n'interdit toutefois pas de nommer « potentiel » de gravitation la grandeur U.

En intégrant le travail de la force $\left(\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\vec{G}\right)$ pour obtenir l'équivalent du théorème de l'énergie cinétique, il en tire ainsi : $mc^2 = \varepsilon \exp(U/c^2)$ où ε est une constante du mouvement (le long de la trajectoire), dépendant des conditions initiales ; ce n'est pas une constante en « tout point de l'espace ».

Remarque : On peut envisager de considérer la grandeur $-\varepsilon \exp(U/c^2)$ *comme une généralisation de l'énergie potentielle.*

Lorsque l'auteur indique alors que « l'énergie dépend uniquement de la position spatiale », cela conduit à une ambiguïté regrettable. L'équivalent non relativiste dans un champ de pesanteur uniforme serait : $\frac{1}{2}mv^2 = mgz + \text{Cste}$; ceci ne signifie pas que l'énergie cinétique ne dépend que de la position…

4. MÉTRIQUE ASSOCIÉE À LA LOI DE NEWTON ET DÉCALAGE DES HORLOGES

L'auteur en déduit ensuite que le mouvement correspond à une géodésique de la métrique $ds^2 = \exp(2U/c^2)\cdot(c^2dt^2 - d\ell^2)$. On peut y voir une analogie avec la description relativiste de la gravitation (relativité générale), mais il y a une différence fondamentale : ici la grandeur temporelle mesurée par l'expérimentateur est dt et non ds (qui apparaît ici comme un « intermédiaire de calcul » pour étudier les mouvements).

Lorsque l'auteur envisage ensuite la comparaison de deux mesures égales pour deux intervalles communs de temps, en deux lieux différents A et B, il ne justifie pas pourquoi cela devrait correspondre à $ds_A = \exp(U_A/c^2)\cdot c\,dt_A^2 = \exp(U_B/c^2)\cdot c\,dt_B^2 = ds_B$. En effet, ce problème de mesure de durée ne correspond pas *a priori* à celui du mouvement d'une particule ; en outre, même pour ramener la mesure de durée à l'étude de propagation des photons, il faudrait au moins justifier que l'étude effectuée pour le mouvement des particules massives est encore valable dans la limite $m_0 = 0$.

Enfin, il est difficile pour l'auteur d'être moins clair lorsqu'il évoque une compensation, entre l'effet de variation de fréquence d'un photon et l'effet de décalage des horloges, pour conclure que l'énergie d'un photon (de masse « au repos » m_0 nulle…) est inchangée parce que la fréquence ne varie pas alors qu'elle varie, mais que c'est compensé… En fait, la fréquence d'un photon qui « tombe » augmente parce que son énergie potentielle diminue et que son énergie « cinétique » $E_c = cp = h\nu$ augmente.

Remarque : Resterait à trouver l'équivalent pour un photon de la grandeur $-\varepsilon \exp(U/c^2)$ *obtenue dans le raisonnement pour une particule massive.*

5. LA SOLUTION DE SCHWARZSCHILD

L'auteur considère dans cette partie la solution de SCHWARZSCHILD, mais il l'interprète d'une façon non conforme à la théorie de la relativité générale (dont elle est issue). Il en déduit que cette solution n'est pas conforme aux observations expérimentales ; cela est contradictoire… Si on modifie une théorie correcte, on risque généralement d'obtenir une autre théorie non correcte, mais ce n'est plus la même théorie !

Il semble nécessaire de préciser les hypothèses de la relativité générale. En premier, on commence par définir une méthode de synchronisation des horloges : en envoyant un signal lumineux de A en B, puis en le faisant immédiatement revenir de B en A, l'expérimentateur en A peut considérer que l'instant de passage en B était au milieu de l'intervalle de temps qu'il constate entre départ et retour (au moins pour deux points très proches). On considère donc qu'on peut ainsi (au moins de proche en proche) synchroniser les horloges à un « instant T_1 ». À ce niveau du raisonnement, la notation T_1 est juste « un nom » et ne correspond à aucune valeur numérique de temps : tous les événements de l'espace qui se produisent « à ce moment » sont simultanés.

On peut procéder de même à un « instant T_2 » ultérieur. Or, quand deux expérimentateurs immobiles, placés en A et B, mesurent la durée τ qui sépare ces deux instants (à l'aide de deux horloges identiques) : ils constatent que $\tau_A \neq \tau_B$.

Remarque : Ce phénomène a dû être pris en compte dans la réalisation des dispositifs de positionnement par satellite (GPS).

Il est donc physiquement nécessaire de considérer que, sous l'effet de la gravitation, le temps ne s'écoule pas de la même façon partout : chaque lieu est associé à un « temps propre ». Dès lors, la valeur numérique de ce temps ne peut pas directement servir à préciser « numériquement » les notations T_1 et T_2 : il faut choisir une notation par des valeurs numériques « quelconques » (vérfiant tout de même un certain nombre de propriétés mathématiques) qui puissent être communes à tout l'espace et à partir desquelles on puisse aisément recalculer les durées. Une façon simple peut consister à utiliser la valeur particulière de la durée mesurée entre T_1 et T_2 par un individu situé « à l'infini » (suffisamment loin de l'astre pour que l'effet gravitationnel y soit négligeable).

On peut alors noter t le « temps » ainsi mesuré, mais ce paramètre ne correspond pas directement aux durées mesurées en n'importe quel point de l'espace, qui sont associées au « temps propre » du lieu : $d\tau_A = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_A}\right) \cdot dt \neq \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_B}\right) \cdot dt = d\tau_B$.

Cette démarche est fondamentalement différente de celle de l'article commenté ici, pour laquelle la variable t représente la durée mesurée par les horloges. Or, l'auteur garde la même interprétation pour étudier la solution de SCHWARZSCHILD : réinterprétée autrement que dans ses principes de base, la « pseudo relativité générale » envisagée ne donne pas des résultats corrects, mais ce n'est plus la même théorie.

Remarque : En fait, même si la méthode proposée par l'auteur était équivalente en première approximation, il serait par ailleurs peut-être préférable de considérer la relativité générale, car (même si ce n'était pas forcément son but premier) elle a l'énorme avantage de décrire la géométrie de façon plus intrinsèque et de mieux en respecter les principes d'invariance.

CONCLUSION

Indépendamment des points litigieux qui me semblent difficilement contournables, la démarche proposée dans cet article est originale et intéressante, tout à l'honneur de son auteur, mais non aboutie… il aurait été pour le moins nécessaire de prendre des précautions oratoires pour l'exposer…

BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

[1] RESSAYRÈS P. « Métrique d'espace courbe associée aux lois de Newton et de Coulomb ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, février 2006, vol. 100, n° 881, p. 223-228.

[2] PARTICLE DATA GROUP, « review of particle properties » `http://pdg.lbl.gov/` (voir la page « kinematics »).

[3] Voir par exemple :
- ♦ LANDAU L. et LIFCHITZ E. *Théorie du champ*. Éditions Mir.
- ♦ WEINBERG S. *Gravitation and cosmology*. Éditions Wiley, 1972.

Jean-Michel LAFFAILLE
Professeur de sciences physiques en MPSI
Lycée Henri Bergson
Angers (Maine-et-Loire)