Forum physique

Propagation des incertitudes et effet des corrélations

par J. Michel Laffaille

Résumé : commentaires de propos fréquemment rencontrés sur la propagation des incertitudes, ou comment la méconnaissance des corrélations entre paramètres amène à des contradictions.

Introduction

L'article « Mesure avec une règle » [1] décrit de façon intéressante quelques aspects expérimentaux et théoriques associés aux calculs d'incertitudes. Y sont entre autres commentées les deux formules, l'une linéaire et l'autre quadratique, les plus fréquemment utilisées pour la propagation des incertitudes :

> « [...] la formule de propagation des incertitudes : $(\Delta f)^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2$ [...]
> et nous évitons d'utiliser la formule : $\Delta f = \sum_i \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta x_i\right)$ qui surestime les incertitudes, parfois même avec un tel excès que l'on en perd son sens physique. [...] ».

Bien que ces propos ne soient pas totalement inexacts, ils méconnaissent (même si ce n'est que par une rédaction ambiguë) des aspects importants des corrélations.

1. Mesure de la longueur d'un assemblage de cartes

• L'article évoque (entre autres) l'estimation de la longueur d'un assemblage de N cartes mises bout à bout, à partir de la mesure individuelle des cartes. Supposant qu'on utilise une règle graduée par intervalles $\delta = 1$ mm (par exemple), l'article considère l'incertitude d'arrondi $\frac{\delta}{2}$ sur la mesure d'une carte, supposant en comparaison négligeable l'incertitude de graduation (usuellement de l'ordre de ± 1 mm pour 300 mm).

Il est alors suggéré que la formule linéaire donne une incertitude 50δ pour $N = 100$, tandis que la formule quadratique donne $5,7\delta$ car « elle tient compte des corrélations » (*sic*). Il en est déduit que la formule linéaire doit être soigneusement évitée.

Cela est très discutable :

- d'une part, utilisée de la même façon, la formule quadratique donne $\sqrt{N}\frac{\delta}{2} \approx 3,5\delta$ (l'incertitude $5,7\delta$ correspond à d'autres circonstances, associées à des fluctuations sur la largeur des cartes, donc n'a aucun rapport avec la simple combinaison évoquée ici) ;
- d'autre part, cela correspond au contraire à ignorer les corrélations, qui nécessiteraient une formule moins simple :

$$(\Delta f)^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2 + \sum_i \sum_{j\neq i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} c(x_i, c_j)\right)$$

où $c(x_i, x_j)$ désigne le coefficient de covariance mutuelle des paramètres correspondants, estimé d'après $\left\langle \left(x_i - \langle x_i\rangle\right).\left(x_j - \langle x_j\rangle\right)\right\rangle$ de la même façon que $(\Delta x_i)^2$ est estimé d'après $\left\langle \left(x_i - \langle x_i\rangle\right)^2\right\rangle$.

• En fait, pour une incertitude d'arrondi assez grande et des cartes provenant d'un même jeu, la corrélation est très grande : l'arrondi est pratiquement le même pour toutes les cartes, c'est-à-dire que les incertitudes correspondantes ne sont pas aléatoires mais systématiques. Là où on risque de perdre le sens physique, c'est en méconnaissant ces corrélations.

Dans ce cas, la corrélation est quasi totale et $c(x_i, x_j) \approx \Delta x_i.\Delta x_j \approx \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$; on obtient ainsi pour la somme des longueurs de N cartes :

$$(\Delta f)^2 = \sum_i \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \sum_i \sum_{j\neq i} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = \left(N\frac{\delta}{2}\right)^2$$

ce qui redonne une incertitude $\approx 50\delta$ pour 100 cartes. Ainsi, la formule linéaire pour la propagation des incertitudes correspond au cas de la corrélation la plus défavorable.

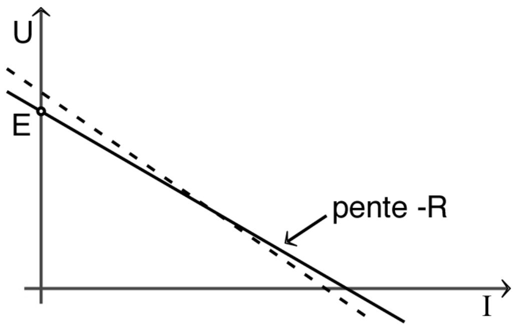
• Il ne revient pas au même de mesurer une carte et de multiplier la longueur par N, ou d'ajouter les mesures de N cartes d'un même jeu, d'un même modèle, d'un même fabricant, effectuées avec la même règle (donc de ce fait fortement corrélées), ou d'ajouter N mesures de la même carte avec des règles « indépendantes » (de différents modèles, de fabricants différents,... d'où des écarts d'arrondi fluctuant à peu près aléatoirement selon la mesure), etc.

Dans ce dernier cas par exemple, la moyenne des mesures [2] serait affectée d'une incertitude $\frac{1}{\sqrt{N-1}}\frac{\delta}{2}$ et l'estimation de la longueur de N cartes pourrait être proposée en multipliant par N, donc affectée d'une incertitude $\frac{N}{\sqrt{N-1}}\frac{\delta}{2} \approx \sqrt{N}\frac{\delta}{2}$. Chaque situation demande une réflexion particulière, rarement évidente.

2. Corrélation entre les paramètres d'un modèle ajusté sur des données expérimentales

• Pour illustrer les corrélations, on peut considérer l'ajustement d'un modèle de Thévenin ou de Norton sur les mesures de la tension U et du courant I obtenues pour une pile Daniell. Même s'il n'y a aucune corrélation entre les appareils de mesure, les valeurs mesurées sont par nature corrélées si elles suivent le modèle caractérisant la pile ; cela induit des corrélations entre les paramètres du modèle ajusté.

Si on ajuste un modèle de la forme U = E - R I, toute augmentation de E induit un « pivotement » de la droite de tendance autour du barycentre (pondéré) des points mesurés, donc induit une augmentation de R (corrélation positive).



Sur un exemple de mesures obtenues par des élèves de MPSI, on a obtenu par la méthode du χ^2 [3] :

$$\mathrm{E} = 1{,}063 \pm 0{,}022\ \mathrm{V} \ ; \ \mathrm{R} = 15{,}49 \pm 0{,}40\ \Omega \ ; \ c(\mathrm{E}, \mathrm{R}) = 0{,}006554\ \mathrm{V.\Omega}.$$

Que se passe-t-il si on souhaite en déduire l'incertitude sur le courant de court-circuit $\mathrm{I_c} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$? La corrélation positive fait que les deux formules sans corrélation surestiment l'incertitude.

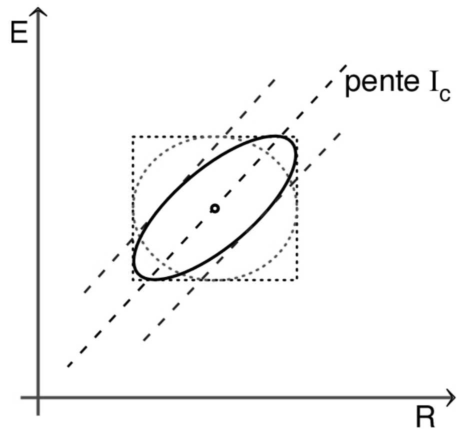
Plus précisément, dans le plan des coordonnées (R ; E), la zone d'incertitude dépend de la formule de propagation utilisée :

- pour l'expression linéaire, cela correspond à un rectangle ;
- pour le cas quadratique, cela correspond à une ellipse « droite » ;
- avec corrélations, on obtient une ellipse oblique d'équation [4] :

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x y = 1 - \alpha^2,$$

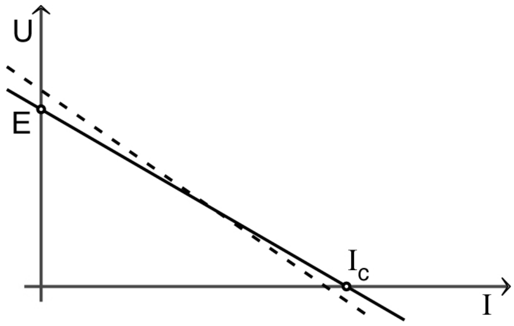
en repérant les écarts aux valeurs optimales par :

$$x = \frac{\mathrm{R} - \mathrm{R_0}}{\Delta\mathrm{R}} \ ; \ y = \frac{\mathrm{E} - \mathrm{E_0}}{\Delta\mathrm{E}} \ ; \ \alpha = -\frac{c(\mathrm{E}, \mathrm{R})}{\Delta\mathrm{E}.\Delta\mathrm{R}}.$$



On obtient ainsi : I_c = 68,6 mA ± 1,2 mA, alors que sans corrélation l'incertitude est estimée à 3,3 mA avec la formule linéaire et à 2,3 mA avec la formule quadratique. Cela signifie-t-il que, faute de connaître les corrélations, la formule quadratique est préférable ? Non, car la corrélation peut aussi bien avoir un effet inverse.

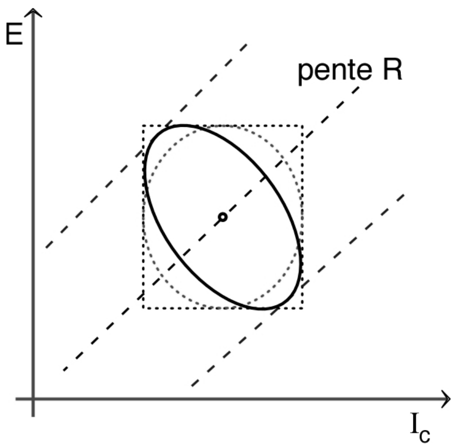
• Si on ajuste un modèle de la forme $U = E.\left(1 - \frac{I}{I_c}\right)$, toute augmentation de E induit une diminution de I_c (corrélation négative).



Sur un autre exemple de mesures, on a de même obtenu par la méthode du χ^2 :

$$E = 1{,}064 \pm 0{,}041 \text{ V} \;;\; I_c = 69{,}5 \pm 2{,}2 \text{ mA} \;;\; c(E, I_c) = -0{,}0400 \text{ V.mA.}$$

Que se passe-t-il si on souhaite en déduire l'incertitude sur la résistance $R = \frac{E}{I_c}$? La corrélation négative fait que l'incertitude est ici intermédiaire, plus proche de l'estimation donnée par la formule linéaire.



On obtient ainsi : $R = 15,31\Omega \pm 0,93\Omega$, alors que sans corrélation l'incertitude est estimée à $1,07\Omega$ avec la formule linéaire et à $0,76\Omega$ avec la formule quadratique. Si on ignore la corrélation et qu'on veut éviter de sous-estimer les incertitudes, il est alors souvent prudent d'utiliser l'expression linéaire.

3. Conclusions

• Ne jetons pas la pierre à la formule linéaire de propagation des incertitudes : elle est « seulement » une version pessimiste pour le cas où on ignore les corrélations.
• Prenons un grand soin à étudier les corrélations, chaque fois que cela est possible, ainsi qu'à ne pas confondre les effets aléatoires et les effets systématiques.

Références

[1] « Mesure avec une règle », M. Rouaud, *Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique Chimie*, n° 913, avril 2009.

[2] Pour $N = 100$, on peut supposer la répartition gaussienne, mais les estimations d'après des échantillons plus limités peuvent nécessiter la loi de Student ; voir par exemple : « La loi de Student en physique », J.-F. Kentzel, *Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique Chimie*, n° 918, novembre 2009.

[3] L'ajustement peut être fait avec différents logiciels, l'estimation des incertitudes a ici été effectuée à l'aide d'une version simplifiée du logiciel « minuit », très utilisé au CERN (des informations complémentaires sont disponibles sur mon site :

perso.numericable.fr/jlaffaille/JM.div/Minimi/Minimi.html).

[4] J'ai retrouvé ces relations dans mes notes de cours de 3e cycle de physique théorique - physique corpusculaire ; les bases en sont expliquées dans : « À propos de la méthode des moindres carrés », Y. Cortial, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, n° 725, juin 1990 ; « Le calcul des incertitudes », H. Gié et R. Moreau, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, n° 691 (1), février 1987.