LAFFAILLE J. Michel
professeur de sciences physiques en math-sup MPSI
au lycée BERGSON (Angers)

Répartition des spins et quantification

Résumé : commentaires à propos du forum 164 sur la répartition statistique des spins, où l'intervention de la quantification nécessite à mon avis une rédaction plus précise.

Un récent commentaire de Gérard LAVAU [1] signale une analogie très intéressante entre l'intégrale de surface sur une bande sphérique, égale à l'aire de sa projection sur un cylindre de même rayon, et la répartition statistique des spins. L'inconvénient de ce texte, dont la rédaction manque à mon avis de précision, est de causer une ambiguïté : il peut sembler dire que le coefficient $j.(j+1)$ intervenant dans l'expression de la valeur moyenne de la norme du spin est une conséquence uniquement de l'analogie précédente, en particulier applicable au cas quantique, alors que c'est une conséquence essentiellement de la quantification.

Le fait que l'aire d'une bande sphérique soit égale à sa projection sur le cylindre de même rayon implique qu'une répartition uniforme de la direction du spin (répartition isotrope) correspond automatiquement à une répartition uniforme de la projection du spin sur un axe donné (quelconque). Cette propriété est purement géométrique et valable aussi bien en mécanique quantique ou “classique”.

Si on applique ceci en mécanique classique, la valeur moyenne du carré de la projection $J_z = J\cos(\theta)$ du spin sur l'axe (Oz) est : $\left\langle {J_z}^2 \right\rangle = J^2 \dfrac{\int_0^{\pi} \cos^2(\theta)\sin(\theta)d\theta}{\int_0^{\pi} \sin(\theta)d\theta} = \dfrac{J^2}{3}$; ceci correspond à $\left\langle J^2 \right\rangle = J^2$ comme on peut classiquement s'y attendre.

Le même raisonnement en mécanique quantique donne au contraire : $\left\langle {J_z}^2 \right\rangle = \hbar^2 \dfrac{\sum_{-j}^{j} k^2}{2j+1} = \dfrac{j.(j+1)}{3}\hbar^2$; ceci correspond à $\left\langle J^2 \right\rangle = j.(j+1)\,\hbar^2$ ce qui n'est pas a priori attendu.

◊ remarque : si on cherchait à interpréter cela de façon “classique” (ce qui n'aurait très probablement aucune signification physique), on en conclurait que même quand le spin est “le plus aligné” avec l'axe (Oz), sa projection étant alors $J_z = j\,\hbar < \sqrt{\left\langle J^2 \right\rangle}$, il n'est pas tout à fait aligné.

Autant l'analogie considérée est d'une part intéressante pour expliquer le résultat de physique, autant d'autre part elle n'en est pas intrinsèquement la cause.

Références

[1] “Où Archimède rejoint les spins”, G. Lavau, Forum Mathématique n° 164, Bulletin de l'UPS n° 224, octobre 2008.