

Le tourniquet de Mach-Feynman sans la mécanique des fluides

(septembre 2019)

Jean-Michel LAFFAILLE
49000 Angers
laffaille.j-m.edu@orange.fr

La description du tourniquet de Mach-Feynman est a priori un problème impliquant la mécanique des fluides. Une description relativement acceptable peut être obtenue avec la mécanique du solide et des systèmes de points matériels, à condition de préciser soigneusement les effets physiques impliqués, surtout pour le mode inverse.

INTRODUCTION

Le tourniquet de Mach-Feynman fait circuler du fluide dans un tube, mais une description raisonnable de son fonctionnement en mode direct (éjection) peut être obtenue sans particulièrement utiliser la mécanique des fluides (tout au plus quelques notions de statique). Le plus simple pour cela est de ramener ce système ouvert à l'étude d'un système fermé judicieusement choisi, avec la mécanique du solide et des systèmes de points matériels [1].

Pour comparaison, les conclusions de la mécanique des fluides sont rappelées, sans démonstration (ce n'est pas le propos de cet article), à la fin de chacune des différentes parties.

Une première partie décrit le cas plus simple d'un tourniquet à eau dans l'air, par un simple bilan, puis en précisant les effets physiques impliqués (ce cas ne comporte pas de piège et prépare l'étude qui suit).

Une seconde partie décrit le cas d'un tourniquet à eau dans l'eau (ou à air dans l'air), pour lequel les interactions sont plus subtiles. La mécanique des fluides, non indispensable, peut alors apporter un point de vue intéressant.

La compréhension en mode inverse (admission), abordée dans une troisième partie, nécessite une étude soignée des effets physiques impliqués. La mécanique des fluides, bien qu'ici encore non indispensable, apporte dans ce cas d'importants compléments.

1. TOURNIQUET À EAU DANS L'AIR

1.1. Méthode utilisant un bilan de moment cinétique

On considère (figure 1) un tourniquet dont le tube coudé mobile, horizontal, de section s , peut tourner autour de l'axe vertical ascendant (Oz) .

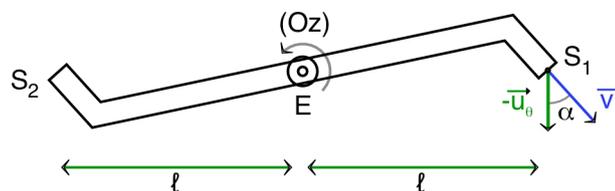


Figure 1 - Schéma du tourniquet (vu du dessus) avec notations.

Le tourniquet, placé dans l'air, est alimenté en eau par une entrée E située sur un tube vertical selon (Oz) , muni d'un raccord rotatif étanche. L'eau est éjectée par chacune des extrémités symétriques S_1 et S_2 avec un débit volumique D . Les deux sorties S_1 et S_2 ayant des effets symétriques sur le moment cinétique, on peut simplifier l'écriture en doublant l'effet d'une sortie notée S . L'effet de E , sur l'axe, est nul ; il peut être omis.

Pour mieux mettre en évidence les aspects importants du raisonnement, on calculera plus simplement le moment cinétique en négligeant le diamètre du tube en comparaison de sa longueur.

Le dispositif étant ouvert, on raisonne sur la variation du contenu entre deux instants séparés par une durée infinitésimale dt , pendant laquelle circule une masse $dm = \rho D dt$ (où ρ est la masse volumique). Le

système fermé étudié correspond au contenu à un instant t (la masse dm sortie à l'instant $t + dt$ en fait alors toujours partie).

La pesanteur, verticale, n'a pas d'effet sur la rotation. En négligeant les frottements, le théorème du moment cinétique peut s'écrire :

$$[\vec{\sigma}(t + dt) + 2 dm \overline{OS} \times \vec{V}] - [\vec{\sigma}(t)] = \vec{0} \quad (1)$$

En notant \vec{v} la vitesse "relative" d'éjection (par rapport au tourniquet), la vitesse de l'eau éjectée (en négligeant le diamètre du tube) est :

$$\vec{V} = \ell \theta' \vec{u}_\theta + \vec{v} \quad (2)$$

Avec $D = s v$, on obtient ainsi :

$$d\sigma_z + 2 \rho D dt \ell [\ell \theta' - v \cos(\alpha)] = 0 \quad (3)$$

Puisque la quantité d'eau contenue dans le tourniquet est constante (même si ce n'est pas toujours la même eau), on peut faire l'hypothèse que le moment cinétique peut être décrit à l'aide d'un moment d'inertie : $\sigma_z = J \theta'$ (cf. Annexe). Ceci donne :

$$J \theta'' + 2 \rho D \ell [\ell \theta' - v \cos(\alpha)] = 0 \quad (4)$$

En notant $\omega = \theta'$, $\Omega = \frac{v}{\ell} \cos(\alpha)$ et $\frac{1}{\tau} = \frac{2\rho D \ell^2}{J}$, l'équation peut s'écrire :

$$\omega' + \frac{1}{\tau} (\omega - \Omega) = 0 \quad (5)$$

Pour une vitesse initiale nulle, on obtient la solution :

$$\omega = \Omega (1 - e^{-t/\tau}) = 0 \quad (6)$$

La vitesse limite Ω correspond au cas où la vitesse d'éjection est radiale : $\ell \theta' - v \cos(\alpha) = 0$.

1.2. Étude plus précise des phénomènes physiques impliqués

Le raisonnement précédent semble considérer le mouvement du tourniquet comme causé par le liquide éjecté ; c'est seulement parce que l'utilisation d'un bilan de moment cinétique est plus facile ainsi.

Si on suppose le tube initialement vide (rempli d'air), la rotation du tourniquet commence dès que du liquide passe le coude : si l'interaction avec le tube dévie l'eau dans le sens horaire, alors (quel que soit le processus détaillé par lequel cette interaction intervient) l'action réciproque met le tube en mouvement dans le sens contraire (forces schématisées figure 2).

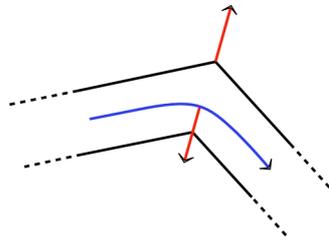


Figure 2 - Actions réciproques au niveau du coude.

L'éjection en sortie est sans effet si on peut négliger l'interaction avec l'air extérieur (pour un petit volume d'eau étudié, continuant sur sa lancée comme un point matériel, de même que pour une balle lancée dans l'air).

--- Commentaires de mécanique des fluides (uniquement pour comparaison) ---

La mécanique des fluides n'est pas nécessaire pour cette interprétation, mais elle permet de préciser la façon dont l'interaction se produit. Pour un fluide "parfait" (c'est-à-dire sans viscosité) incompressible, en régime stationnaire, la conservation de l'énergie peut s'exprimer par la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant [2] (ici le terme avec $z \approx \text{Cste}$ peut être omis) :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p = \text{Cste} \quad (7)$$

Or l'incompressibilité fait que la vitesse diminue là où les lignes de courant s'écartent, donc la pression augmente (la différence de pression, donc de forces pressantes de part et d'autre, correspond au ralentissement).

Le calcul des lignes de courant à l'aide d'un potentiel (hors sujet ici, cf. [2]) montre que, du côté externe du virage (figure 3a), la pression intérieure augmente (les lignes de courant s'écartent) donc est plus grande que la pression extérieure ; inversement, du côté interne du virage (figure 3b), la pression intérieure diminue (les lignes de courant se rapprochent) donc est plus petite que la pression extérieure. Ces deux effets (Venturi) sont la cause de l'interaction précédente (qui peut toutefois être comprise intuitivement sans mécanique des fluides) entraînant le tourniquet dans le sens anti-horaire.

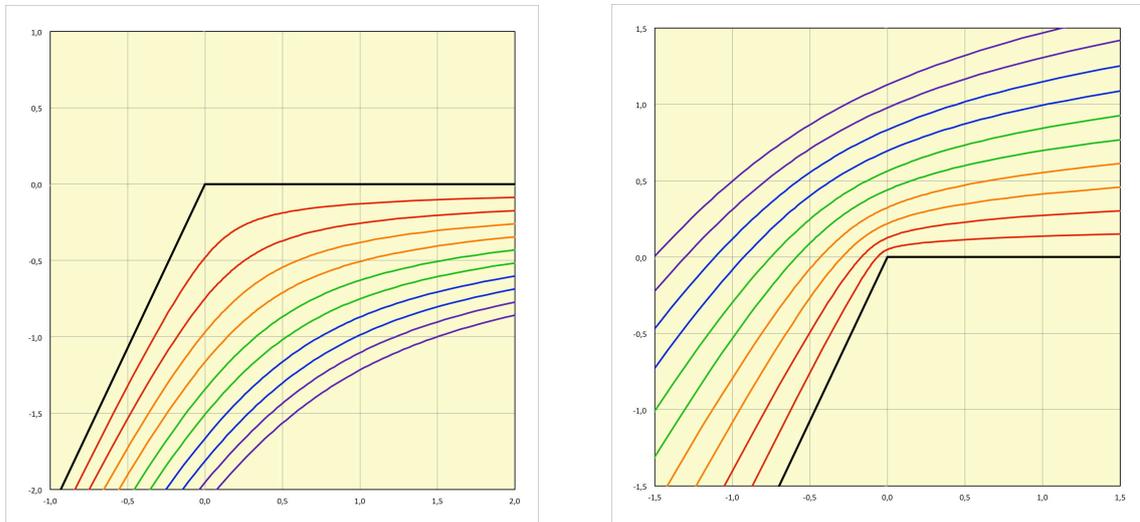


Figure 3 - a et b - Effets de l'interaction en mécanique des fluides selon les lignes de courant.

2. TOURNIQUET À EAU DANS L'EAU ; MODE D'ÉJECTION

2.1. Comportement général

La situation est analogue mais un peu différente pour un tourniquet à eau placé dans l'eau (les conclusions peuvent aussi concerner un tourniquet à air placé dans l'air). Principalement il peut y avoir deux modes : éjection (cas considéré ici, analogue au précédent) mais aussi absorption du fluide extérieur (cas étudié dans une partie ultérieure).

Dans cette situation, le raisonnement est analogue et on peut conclure à un mouvement semblable, mais quelques effets peuvent en modifier certains paramètres. Le transfert de rotation au fluide extérieur par l'éjection tend à en faire tourner le voisinage dans le sens horaire ; mais au contraire, l'interaction (par frottements) avec le tube fait aussi un peu d'effet inverse. On peut supposer cela négligeable et considérer le fluide extérieur immobile, mais son léger mouvement d'ensemble peut en réalité modifier un peu Ω et τ (le mouvement par rapport au référentiel diffère un peu du mouvement par rapport au milieu).

Il faut raisonnablement prendre en compte un frottement, ici non négligeable ; un effet visqueux est plausible (étudié dans la partie suivante).

En plus de l'interaction au niveau du coude, il peut maintenant y avoir une interaction avec le fluide extérieur au moment de l'éjection. Sans utiliser la mécanique des fluides, on peut penser possible que seule une proportion β de l'impulsion éjectée soit transmise au milieu extérieur ; par exemple la répartition de la

pression peut appliquer une partie de l'effet au récipient fixe, sans transmission au fluide. D'après les relations (4) et (5), la prise en compte d'un tel effet revient à multiplier ρD donc $\frac{1}{\tau}$ par $\beta < 1$, donc l'approche de la vitesse limite Ω est ralentie.

Remarque : même si on ne connaît pas le mécanisme exact, cela implique que le fluide sortant soit ralenti, donc un peu "dispersé" de part et d'autre (selon les lignes de courant) puisqu'il est incompressible ; en outre, selon la déviation du courant, qui peut dépendre de θ^* , cela pourrait aussi influencer Ω (en modifiant la valeur effective de \bar{v} à prendre en compte).

--- Commentaires de mécanique des fluides (uniquement pour comparaison) ---

La mécanique des fluides permet de préciser. Le fluide sortant arrive atteint l'extrémité du tube avec une vitesse trop grande pour que les lignes de courant puisse suivre le bord de la surface et il se produit un "décollement" : le liquide sort sous forme de jet dans le fluide extérieur (figure 4 - a).

Remarque : si la viscosité n'est pas négligeable, le fluide entourant le jet peut aussi être entraîné avec un effet de frottement, mais ce n'est pas ce qui est considéré ici.

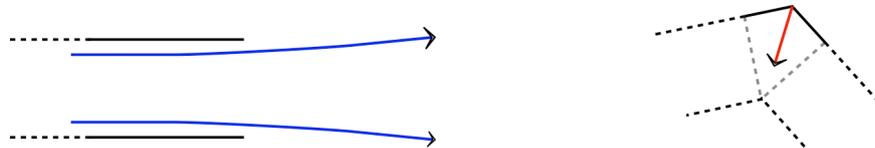


Figure 4 - a et b - Lignes de courant en jet et résultante des forces pressantes.

Or l'interaction avec le bord tend à causer un "évasement" du jet, donc un ralentissement du fluide, donc ceci revient à éjecter une quantité de mouvement plus faible. Mais réciproquement, cela correspond à une pression plus faible à l'intérieur du tube, ainsi le bilan des forces pressantes intérieures et extérieures au niveau du coude (non symétrique) donne une résultante tendant à entraîner le tube dans le sens horaire, donc à diminuer l'effet obtenu précédemment (figure 4 - b).

En outre, en régime variable, la circulation locale du fluide autour du tube peut causer une inertie supplémentaire et augmenter τ [3].

2.2. Effet d'un frottement fluide visqueux

Avec un frottement fluide visqueux, l'équation (4) devient :

$$J \theta'' + 2 \rho D \ell . [\ell \theta' - v \cos(\alpha)] = -k \theta' \quad (8)$$

Ceci peut aussi s'écrire :

$$J \theta'' + 2 \rho D \ell . \left[\left(\ell + \frac{k}{2\rho D \ell} \right) \theta' - v \cos(\alpha) \right] = 0. \quad (9)$$

La vitesse limite est diminuée : $\Omega' = \frac{v}{\ell + \frac{k}{2\rho D \ell}} \cos(\alpha)$; la constante de temps est diminuée dans les

mêmes proportions : $\frac{1}{\tau'} = \frac{2\rho D \ell}{J} \left(\ell + \frac{k}{2\rho D \ell} \right)$.

Remarque : la durée τ plus courte n'est pas contradictoire car elle l'est dans les mêmes proportions que Ω ; en particulier l'accélération initiale $\approx \frac{\Omega}{\tau}$ correspondant à un frottement nul est inchangée.

3. TOURNIQUET À EAU DANS L'EAU ; MODE D'ADMISSION

3.1. Méthode utilisant un bilan de moment cinétique

3.1.1. Étude “brute” sans frottement

Si on considère (trop) simplement que le liquide entrant à l'extrémité du tube a une vitesse “relative” \vec{v} de sens contraire, on obtient :

$$[\vec{\sigma}(t + dt)] - [\vec{\sigma}(t) + 2 dm \overline{OS} \times \vec{V}] = \vec{0} \quad (10)$$

$$\vec{V} = \ell \theta' \vec{u}_\theta + \vec{v} \quad (\text{où } \vec{v} \text{ est de sens contraire}) \quad (11)$$

$$d\sigma_z - 2 \rho D dt \ell \cdot [\ell \theta' + v \cos(\alpha)] = 0 \quad (12)$$

$$J \theta'' - 2 \rho D \ell \cdot [\ell \theta' + v \cos(\alpha)] = 0 \quad (13)$$

Avec les notations précédentes, l'équation peut s'écrire :

$$\omega' - \frac{1}{\tau} \cdot (\omega + \Omega) = 0 \quad (14)$$

Pour une vitesse initiale nulle, on obtient la solution divergente :

$$\omega = -\Omega \cdot (1 - e^{t/\tau}) = 0 \quad (15)$$

Remarque : pour toute vitesse initiale $\omega_0 \neq -\Omega$ (correspondant au cas $\ell \theta' + v \cos(\alpha) = 0$ où la vitesse d'admission est radiale), on obtient de même une solution divergente.

Il est vrai que le système est déformable, donc qu'une augmentation de l'énergie cinétique peut être causée par un travail des forces intérieures, mais le caractère divergent suggère un défaut de modélisation.

Remarque : contrairement à ce que le cas particulier $\omega = -\Omega$ pourrait laisser penser, la divergence se fait vers les valeurs de ω positives.

3.1.2. Étude “brute” avec frottement

Avec un frottement fluide visqueux, l'équation (13) devient :

$$J \theta'' - 2 \rho D \ell \cdot [\ell \theta' + v \cos(\alpha)] = -k \theta' \quad (16)$$

Ceci peut aussi s'écrire :

$$J \theta'' - 2 \rho D \ell \cdot \left(\ell - \frac{k}{2\rho D \ell} \right) \theta' + v \cos(\alpha) = 0 \quad (17)$$

La vitesse limite est augmentée (en valeur absolue) : $\Omega' = \frac{v}{\ell - \frac{k}{2\rho D \ell}} \cos(\alpha)$; la constante de temps est

augmentée dans les mêmes proportions : $\frac{1}{\tau'} = \frac{2\rho D \ell}{J} \left(\ell - \frac{k}{2\rho D \ell} \right)$.

Certes, ici encore τ et Ω augmentent dans les mêmes proportions, donc l'accélération initiale $\approx \frac{\Omega}{\tau}$ correspondant à un frottement nul est inchangée. Certes, un frottement de faible coefficient k ralentit l'évolution du mouvement (ici la divergence), comme généralement observé pour ce type d'effet. Mais par ailleurs un frottement d'assez grand coefficient k change le signe de Ω et τ (en passant par l'infini) : le mouvement change de sens et devient convergent. Or, un frottement peut s'opposer au mouvement et le ralentir (en dissipant de l'énergie), mais il ne peut pas en changer le sens. Cela ne peut que renforcer les soupçons qui pèsent sur la modélisation.

3.1.3. Étude plus raisonnable

Expérimentalement, dans la plupart des cas [4], un tel dispositif en mode d'admission reste immobile s'il l'est initialement. En outre, si on essaye de le lancer manuellement, il s'arrête assez rapidement (à cause des frottements).

Une simple modification du modèle permet de décrire cela. Le liquide entrant à l'extrémité du tube a une vitesse \bar{V} correspondant à une vitesse "relative" \bar{v} de sens contraire, mais il n'acquiert cette vitesse que par interaction avec le tourniquet. Il n'apporte pas au système la quantité de mouvement correspondante puisqu'il ne l'acquiert qu'une fois intégré au système et interagissant avec ses autres parties.

Le raisonnement précédent peut éventuellement s'appliquer, incluant l'équation (10), mais avec pour ce fluide entrant une vitesse nulle avant absorption :

$$\bar{V} = \bar{0} \quad (18)$$

$$J \theta'' = 0 \quad (19)$$

Ceci correspond à une rotation uniforme, donc il est plus judicieux d'ajouter un frottement :

$$J \theta'' + k \theta' = 0 \quad (20)$$

On obtient ainsi une vitesse limite nulle et une constante de temps $\frac{1}{\tau'} = \frac{k}{J}$ associée à la dissipation.

3.2. Étude plus précise des phénomènes physiques impliqués

Le raisonnement précédent semble considérer le mouvement du tourniquet comme causé par le liquide absorbé ; c'est seulement parce que l'utilisation d'un bilan de moment cinétique est plus facile ainsi.

Si on suppose le tube initialement vide (rempli d'air), la rotation du tourniquet (initialement immobile) pourrait commencer dès que du liquide entre à l'extrémité ; si une différence de pression peut faire entrer du liquide dans le tube (elle est indispensable pour provoquer sa mise en mouvement), elle peut aussi tendre à entrainer le coude en sens inverse (résultante des forces pressantes sur le coude comme dans la partie 2.1).

Par contre, dès que du liquide passe le coude (figure 5), l'interaction avec le tube dévie l'eau et l'action réciproque tend à mettre le tube en mouvement dans le sens anti-horaire (puisque le passage du coude dans l'autre sens ne modifie pas le sens des force résultantes sur le fluide et sur le tube).

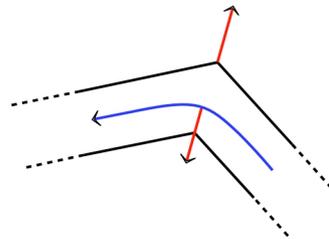


Figure 5 - Actions réciproques au niveau du coude.

Remarque : cela se retrouve de même selon la mécanique des fluides.

Contrairement à la situation observée pour le tourniquet en mode d'éjection (l'effet à l'extrémité n'était qu'une correction du second ordre), l'expérience montre que pour l'admission les deux effets se compensent généralement. Cette différence quantitative peut se comprendre dans la mesure où ce mode nécessite de mettre en mouvement le fluide en partant d'une vitesse nulle ; le terme correspondant est alors nettement plus important.

--- Commentaires de mécanique des fluides (uniquement pour comparaison) ---

La mécanique des fluides permet de préciser cela. En partant d'une vitesse nulle, le fluide est aspiré dans le tube en provenant de toute la périphérie (il n'y a pas de "jet") et les ligne de courant ne décollent pas de la surface. En contournant le bord de façon plus abrupte, la dépression par effet Venturi au voisinage de l'extrémité est nettement plus marquée et permet ainsi l'importante accélération nécessaire.

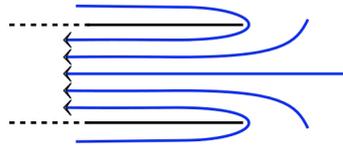


Figure 6 - Lignes de courant sans jet.

Expérimentalement, dans quelques cas [5], un tel dispositif en mode d'admission se met en mouvement en sens inverse, mais avec une vitesse limite plus faible. Or l'interaction au niveau de l'extrémité du tube peut dépendre notablement des lignes de courant, elles-mêmes dépendant de la forme du bord. Sans entrer dans le détail d'une description par la mécanique des fluides, on peut supposer l'intervention d'un effet Venturi dans certains cas encore plus important : l'écoulement plus rapide au niveau de l'extrémité où les lignes de courant se resserrent cause une dépression supérieure et cet effet l'emporte un peu.

CONCLUSION

Bien qu'impliquant la mécanique des fluides, le fonctionnement du tourniquet de Mach-Feynman peut être raisonnablement décrit, tant en mode d'éjection ou d'admission, avec "seulement" la mécanique du solide et des systèmes de points matériels. La mécanique des fluides peut par contre apporter un complément d'information intéressant, en particulier pour le mode inverse.

ANNEXE

On note $r = R$ le rayon du début du coude et on suppose pour simplifier que l'angle α du tube avec \vec{u}_θ est constant entre R et ℓ (ceci suppose que la partie coudée ne correspond pas à un segment de droite mais à une spirale exponentielle $r(\theta) \propto e^{\lambda\theta}$).

En notant σ_{z0} le moment cinétique du tube, on peut considérer la vitesse de l'eau à l'intérieur :

$$\vec{V}(r) = v \vec{u}_r + r \theta' \vec{u}_\theta \quad \text{puis} \quad \vec{V}(r) = v \sin(\alpha) \vec{u}_r + [r \theta' - v \cos(\alpha)] \vec{u}_\theta ;$$

$$\sigma_z = \sigma_{z0} + \int_0^R r^2 \theta' \rho s \, dr + \int_R^\ell r [r \theta' - v \cos(\alpha)] \frac{\rho s}{\sin(\alpha)} \, dr ;$$

$$\sigma_z = (J_0 + J_e) \theta' + \zeta_v \quad \text{avec} :$$

J_0 moment d'inertie pour le tube ;

$$J_e = \rho s \left[\frac{R^3}{3} + \frac{\ell^3 - R^3}{3 \sin(\alpha)} \right] \quad \text{pour la rotation sans écoulement de l'eau ;}$$

$$\zeta_v = - \rho s \cotan(\alpha) v \frac{\ell^2 - R^2}{2} \quad \text{pour l'écoulement de l'eau.}$$

On obtient effectivement $\sigma_z' = (J_0 + J_e) \theta''$ sans influence de l'écoulement de l'eau, mais la présence du terme constant ζ_v montre que ce n'est pas aussi évident qu'on aurait pu le penser a priori.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] De nombreux articles peuvent être consultés ; voir par exemple :
J.-P. Pérez et O. Pujol, « *Le tourniquet de Mach-Feynman et le chariot à eau de Bergeron - Deux systèmes ouverts instructifs* », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 112, n° 1008, p. 1169-1177, novembre 2018 ;
A. Jenkins, « *An elementary treatment of the reverse sprinkler* », décembre 2003
<https://arxiv.org/pdf/physics/0312087.pdf>
- [2] L. Landau et E. Lifchitz, « *Mécanique des fluides* », Moscou : Mir, 2^e édition, 1989 ;
J.-M. Brébec, « *H-Prépa - Mécanique des fluides* », Paris : Hachette, 2004.
- [3] J.-M. Laffaille, « *Poussée d'Archimède et objet mobile* », *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, vol. 105, n° 937, p. 987-1001, octobre 2011.
- [4] Des vidéos se trouvent sur internet (rechercher “sprinkler”) ; voir par exemple :
<https://www.youtube.com/watch?v=7sGGq6OnXHE> ;
https://www.youtube.com/watch?v=VF3Zk_Wged0 ;
<https://www.youtube.com/watch?v=fVBgMogw4P8>.
- [5] Des vidéos se trouvent sur internet ; voir par exemple :
<https://www.youtube.com/watch?v=gehj6WzdbOE> ;
<https://www.youtube.com/watch?v=AxUa6qGd2zQ> ;
<https://www.youtube.com/watch?v=sDDbX23Xeyc>.